Université Mohamed Seddik Ben Yahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'Informatique

Date : 02 /02/2017
L2– Informatique

Examen du Logique Mathématique

(Durée 1h30)

Exercice 1 *(3 points)*

Démonter les propriétés suivantes :
- $\models (P \leftrightarrow Q)$ ssi $P \equiv Q$
- $\models (P \wedge Q)$ ssi $\models P$ et $\models Q$
- si $\models P$ ou $\models Q$ alors $\models (P \vee Q)$

Exercice 2 *(5 points)*
On s'intéresse ici à des formules qui contiennent le symbole d'équivalence $p \Leftrightarrow q$.

On rappelle que $p \Leftrightarrow q$ est défini comme $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Dans la suite x, y et z désignent trois variables propositionnelles.
1. Donner la forme normale conjonctive des formules $(x \Leftrightarrow y)$ et $\neg(x \Leftrightarrow y)$.
2. Construire la table de vérité de la formule $(x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z))$. Cette formule est-elle valide? satisfiable?
3. On considère les formules

   - $A \equiv (x \Leftrightarrow z) \wedge y$
   - $B \equiv (y \Leftrightarrow z) \Rightarrow x$

(a) Mettre les formules A et $\neg B$ en forme FNC.
(b) En utilisant la résolution, montrer que la formule B est conséquence logique de A.

Exercice 3(*6 pts*) Soit le système d'axiomes du calcul propositionnel :
A1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3 : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
et la règle du Modus Ponens : $A, A \rightarrow B \vdash B$.

1) Montrer dans la théorie T que :

   a) $(A \rightarrow B) \vdash (\neg B \rightarrow \neg A)$
   b) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$
   c) $A \rightarrow B , B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

2) Montrer, maintenant, que la formule suivante est un théorème ; et cela avec l'utilisation des théorèmes précédentes et sans utiliser TD
$\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

Exercice 4 *(6 points).*

On se place dans un langage avec un symbole de prédicat unaire P. Soit la formule $A \equiv \exists x, (P(x) \Rightarrow \forall y, P(y))$.

1. Donner la forme de Skolem de A, on appelle B cette formule.
2. La formule A est-elle valide ? justifier la réponse.
3. Vérifier que $B \models A$
4. Peut-on en déduire que la formule B est valide ? justifier la réponse.
5. On introduit un symbole de prédicat binaire R et la formule $C \equiv \exists x, ((\exists z, R(x, z)) \Rightarrow \forall y, \exists z, R(y, z))$
   (a) Quel est le lien entre la formule A et la formule C ?
   (b) Peut-on en déduire que C est valide ? justifier la réponse

Bon courage