



## Epreuve de Moyenne Durée

Le : 09/02/2023 – Durée 1h 30mn – Seul document autorisé : série 2 (papier)

### Exercice 1 : (3 pts)

On se trouve sur l'île des purs et des pires (les purs disent toujours la vérité, les pires mentent toujours). Trois personnages purs A, B et C sont assis autour d'une table ronde. Chacun d'eux porte un chapeau blanc sur sa tête. Chacun peut voir les chapeaux de ses voisins, mais pas son propre chapeau. Un autre personnage pur D vient à passer et leur dit que la couleur de chacun des chapeaux est rouge ou blanche. Un autre personnage pire E leur dit qu'il n'y a aucun chapeau blanc.

De plus, chacun parmi A, B et C sait si les autres personnages sont purs ou pire.

Un sixième personnage pur leur demande : « Connaissez-vous la couleur de votre chapeau ? ».

Un long moment s'écoule pour que les trois personnages assis autour de la table répondent.

Quelle sera la réponse de chacun d'eux ? Justifier en donnant le raisonnement élaboré par chacun des personnages pour répondre ainsi.

### Exercice 2 : (6 pts)

On définit le connecteur ternaire **If** comme suit : **If**(A, B, C) = **SI A ALORS B SINON C**.

Soit  $g$  la fonction logique, à 3 variables, définie par :  $g(a, b, c) = \mathbf{If}(a, b \wedge c, b \vee c)$ .

1) Établir la table de vérité de  $g$ . (1 pt)

2) Donner la forme normale disjonctive de  $g$ , puis simplifier la. Donner ensuite sa forme normale conjonctive et la simplifier. (2 pts)

3) Exprimer les connecteurs  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  et  $\leftrightarrow$  en fonction des éléments de l'ensemble  $\{g, \perp, \top\}$ . (2 pts)  
( $\perp$  représente le FAUX et  $\top$  représente le VRAI).

4) Exprimer le connecteur **If** en fonction de  $g$ ,  $\perp$ ,  $\top$ . (1 pt)

### Exercice 3 : (6 pts)

Les questions de cet exercice sont à traiter l'aide de la méthode axiomatique.

I) Montrer que :  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ,  $r \rightarrow s \vdash p \rightarrow (q \rightarrow s)$ . (1,5 pts)

II) Soit  $F = (\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C))$ .

II-a) Élaborer une déduction pour montrer que la formule  $F$  est un théorème ( $\vdash F$ ). (1,5 pts)

II-b) Élaborer une démonstration pour montrer que la formule  $F$  est un théorème ( $\vdash F$ ). (1,5 pts)

III) Soit CPF' le calcul obtenu en ajoutant à CPF la formule suivante comme 4<sup>ème</sup> axiome :

$$\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \quad (\text{Ax4})$$

Montrer que CPF' est inconsistent. (1,5 pts)

### Exercice 4 : (5 pts)

Soit le discours suivant : « Si je n'ai pas assez dormi alors je prends du repos ou je fais une sieste, voire les deux. Je ne suis pas de bonne humeur. Si je prends du repos ou je vais à la piscine, voire les deux, alors je suis de bonne humeur. Donc, si je n'ai pas assez dormi alors j'ai fait la sieste. »

1) Formaliser le discours donné en utilisant les variables : (2 pts)

$d$  : « j'ai assez dormi » ;  $r$  : « je prends du repos » ;  $s$  : « je fais la sieste » ;

$h$  : « je suis de bonne humeur » ;  $p$  : « je vais à la piscine ».

2) À l'aide de la résolution propositionnelle, démontrer la validité du discours donné. (3 pts)

**Bon courage !**