

Epreuve de Moyenne Durée

Le : 15/02/2016 – Durée 1h 30mn – Documents non autorisés

Exercice 1 : (4 pts)

1) Montrer que la formule $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ est logiquement équivalente à la formule $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, où α , β et γ sont des variables propositionnelles quelconques.

2) On considère la formule $E = ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (\neg B \vee C)))$, dans laquelle A, B et C sont des variables propositionnelles.

Déterminer une formule logiquement équivalente à E, écrite sans autre symbole de connecteur que \rightarrow et \leftrightarrow .

Exercice 2 : (4 pts)

Dans une île vivent trois espèces d'habitants : les Purs (qui disent toujours la vérité), les Pires (qui mentent toujours) et les Versatiles (qui disent parfois la vérité et mentent d'autres fois, au gré de leur fantaisie).

Chaque habitant de l'île est soit un Pur, soit un Pire, soit un Versatile. Un Pire ne peut épouser qu'une Pure, un Pur ne peut épouser qu'une Pire et enfin un Versatile ne peut épouser qu'une Versatile.

Un couple formé de Mr et Mme A font les déclarations suivantes :

Mr A : « Ma femme n'est pas Versatile » ;

Mme A : « Mon mari n'est pas Versatile ».

Que sont Mr et Mme A ?

Exercice 3 : (6 pts)

On présente le système d'axiomes de Lukasiewicz composé des trois axiomes suivants :

(Ax1') $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

(Ax2') $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$

(Ax3') $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

On dispose de plus de la règle de Modus Ponens (MP) : $A, (A \rightarrow B) \vdash B$

Montrer ce qui suit :

1) $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$ *Trans*

2) $\vdash A \rightarrow A$

3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (pour cette question, on pourra utiliser le théorème de déduction)

4) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Exercice 4 : (6 pts)

a, b, c et d sont quatre nombres entiers. On considère les quatre affirmations :

A1 : « b et c sont des entiers pairs. » ; A2 : « c et d sont de même parité. » ;

A3 : « d ou b est impair. » et A4 : « c est pair. ».

1) À l'aide de la résolution propositionnelle, montrer que $\{A1, A2, A3, A4\}$ est contradictoire. (4 pts)

2) Si parmi les quatre affirmations, une seule est fautive ; laquelle qui ne doit pas l'être ? (2 pts)

Bon courage !