Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

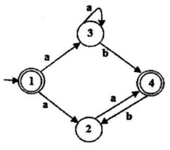
Année universitaire 2014-2015
2ème année Licence Informatique
Théorie des langages

Épreuve finale

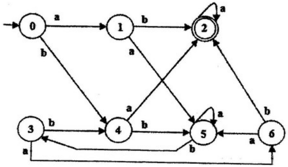
14 Janvier 2015
Durée : 1h30

Exercice n° 01 (10 points):

Soient les AEFs A_1 et A_2 présentés graphiquement comme suit:



A_1



A_2

1. Déterminer le langage $L(A_1)$ (2)
2. Rendre déterministe l'AEF A_1 (3)
3. Montrer que les états *1* et *6* de l'AEF A_2 sont β-équivalents (2)
4. Minimiser l'AEF A_2 (3)

Exercice n° 02 (4 points):

1. Prouver que: $L_1.(L_2.L_3)||_w = (L_1.L_2).L_3||_w$ (2)
2. Trouver l'AEF qui reconnait l'expression régulière : $(a+b)^*c$ (2)

Exercice n° 03 (6 points):

Pour tout langage L, on définit la fonction suivante:

$$fact(L) = \{u / \exists\, w \in L : u \text{ est facteur gauche}^1 \text{ de } w\}$$

Par exemple : **si** $L = \{abc, de\}$ **alors** $fact(L) = \{\varepsilon, a, ab, abc, d, de\}$.

1. Calculer $fact(\{a^n / n \geq 1\})$ et $fact(\{a^{2n}b^m / n, m \geq 0\})$ (2)
2. Pour n'importe quels langages L_1 et L_2 , trouver : $fact(fact(L_1))$, $fact(L_1 \cap L_2)$ (2)
3. Sachant que $fact(L_1.L_2) = fact(L_1) \cup L_1.fact(L_2)$, prouver que tout pour $n \geq 1$:
$$fact(L^n) = fact(L^1) \cup L^1.fact(L^1) \cup L^2.fact(L^1) \cup \ldots \cup L^{n-1}.fact(L^1) \quad (2)$$

---

[1] Le mot $u \in \Sigma^*$ est **facteur gauche** du mot w s'il existe un mot $v \in \Sigma^*$ tel que : $w = uv$.

Corrigé de l'examen final du ThL.

Exercice n° 01:

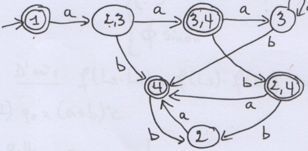
1. Déterminer le langage $L(A_1)$:

$$\begin{cases} X_1 = \varepsilon \quad 0{,}5 \\ X_2 = X_1.a + X_4.b \Rightarrow X_2 = a + X_4.b \\ X_3 = X_1.a + X_3.a \Rightarrow X_3 = a + X_3.a \Rightarrow \boxed{X_3 = a^*a = a^+} \quad 0{,}5 \\ X_4 = X_3.b + X_2.a \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_4 = a^+b + aa + X_4\,ba \Rightarrow \boxed{X_4 = (a^+b + aa)(ba)^*} \quad 0{,}5$$

$$\boxed{L(A_1) = X_1 + X_4 = \varepsilon + (a^+b + aa)(ba)^*} \quad 0{,}5$$

2. Déterminisation de l'AEF A_1:



3

3. $\delta(1,a) = \delta(6,a) = \{5\}$
$\delta(1,b) = \delta(6,b) = \{2\}$

le même langage est formé en partant du ① et du ⑥ donc : ① et ⑥ sont $\mathcal{B}$-équivalents.

2

4. Minimisation de l'AEF A_2:

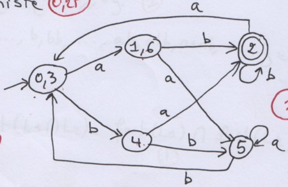
- Pas d'états puits ni états inaccessibles. 0,25
- L'AEF A_2 est déjà déterministe 0,25

$\mathcal{B}_0 = (\{2\}, \{0,1,3,4,5,6\})$ 0,5

$\mathcal{B}_1 = (\{2\}, \{1,6\}, \{0,3,5\}, \{4\})$ 0,5

$\mathcal{B}_2 = (\{2\}, \{1,6\}, \{0,3\}, \{5\}, \{4\})$ 0,5

$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 \Rightarrow$ Arrêt



1

Exercice n° 02 :

1) $L_1.(L_2.L_3)||w = (L_1||w).L_2.L_3 + f(L_1).(L_2.L_3)||w$

$= (L_1||w).L_2.L_3 + f(L_1).((L_2||w).L_3 + f(L_2).L_3||w)$

$= \boxed{(L_1||w).L_2.L_3 + f(L_1).(L_2||w).L_3 + f(L_1).f(L_2).L_3||w}$ $(*)$

$(L_1.L_2).L_3||w = (L_1.L_2)||w.L_3 + f(L_1.L_2).L_3||w$ 0,75

$= (L_1||w.L_2 + f(L_1).L_2||w).L_3 + f(L_1.L_2).L_3||w$

$= \boxed{(L_1||w).L_2.L_3 + f(L_1).(L_2||w).L_3 + f(L_1.L_2).L_3||w}$ $(**)$

$f(L_1.L_2) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } \varepsilon \in L_1.L_2 \Rightarrow \varepsilon \in L_1 \text{ et } \varepsilon \in L_2. \\ \phi & \text{sinon.} \end{cases}$ 0,75

0,25

$f(L_1).f(L_2) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \underline{\text{ssi}} \ \varepsilon \in f(L_1) \text{ et } \varepsilon \in f(L_2) \Rightarrow \varepsilon \in L_1 \text{ et } \varepsilon \in L_2 \\ \phi & \text{sinon} \end{cases}$

0,25

<u>D'où</u> : $f(L_1.L_2) = f(L_1).f(L_2) \Rightarrow (*) = (**)$. c.q.f.d

2) $q_0 = (a+b)^*c$.

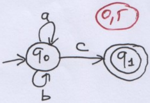
$q_0||a = q_0$

$q_0||b = q_0$ 1

$q_0||c = \{\varepsilon\} = q_1$.

$q_1||a = q_1||b = q_1||c = \phi$ 0,5

D'où l'AEF contient deux états



Exercice n° 03 :

1. $fact(\{a^n / n \geq 1\}) = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\} = \{a^n / n \geq 0\}$. 1

$fact(\{a^{2n}b^m / n,m \geq 0\}) = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots, b, bb, \ldots, ab, abb, aaab, \ldots\} =$
$\{a^n b^m / n,m \geq 0\}$. 1

2. $fact(fact(L_1)) = fact(L_1)$. 1

$fact(L_1 \cap L_2) = fact(L_1) \cap fact(L_2)$ 1

Preuve par recurrence:

Pour $n=1$: $fact(L^1) = fact(L^1) \cup L^0 . fact(L^1) = fact(L^1) \cup fact(L^1)$

$= fact(L^1)$. 0,5

Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$fact(L^{n+1}) = fact(L^n . L^1)$. 0,5

D'après la propriété : $fact(L_1 . L_2) = fact(L_1) \cup L_1 . fact(L_2)$.

D'où: $fact(L^n . L^1) = fact(L^n) \cup L^n . fact(L^1)$.

1

$$= \underbrace{fact(L^1) \cup L^1 . fact(L^1) \cup \dots \cup L^{n-1} . fact(L^1)}_{fact(L^n)} \cup L^n . fact(L^1)$$

$= fact(L^{n+1})$. ~~c.q.f.d~~

D'où la propriété est vraie pour $n+1$. c.q.f.d