Rattrapage

15 Juin 2015 - Durée 1h30

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\},$$

et $F = \langle u = (-2, -1, 1), v = (-1, 0, 2) \rangle$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base. En déduire la dimension de E.

(3) Déterminer une base et la dimension de F, $E + F$ et $E \cap F$.

(4) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

(5) Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer w dans la base $B_{\mathbb{R}^3} = (u, v, (1, -1, 1))$.

2. On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.

(1) Rappeler explicitement les vecteurs e_1, e_2 et e_3.

On s'intéresse à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.

(2) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit $w = (3, 0, 1) \in E$. Vérifier que le vecteur w admet un unique antécédent par f, que l'on déterminera.

(4) Déterminer une base du noyau de f. En déduire le rang de f et une base de Im f.

(5) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

(6) Soient $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$. Montrer que $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(7) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$. Calculer P^{-1} l'inverse de la matrice P.

(8) On note B la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$. Déterminer la matrice B. En déduire que B est inversible et donner l'expression de B^{-1} en fonction de A^{-1}.

3. Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels a, b le système :

$$(S) \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ ax + (1-a)y + (4a-1)z = a + b \\ x + 2(a+1)z = 2b + 1 \end{cases}$$

Barême : 1. 6 pts 2. 10 pts 3. 4 pts .