Faculté de Maths, USTHB
Module (Algèbre 2), 1LIC MI (Section 10)

18 Septembre 2019

EPREUVE FINALE

Exercice 1

1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie n sur un même corps K, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
   Montrer l'équivalence "f est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective".
2. *Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(P(X)) = P'(X)$.*
   Montrer que f est un endomorphisme surjective mais non injective.
   Que peut-on en déduire ? (Comparer avec le résultat précédent.)

Exercice 2 *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x,y,z) = (x+y+3z,\ 2x+3y+z\ ,\ x+2y-2z)$$

1. *Donner une base de $Im\ f$. L'application f est-elle surjective ?*
2. *Montrer que le vecteur $v = (-8,5,1)$ appartient à $Ker\ f$.*
   En déduire une base de $Ker\ f$.
3. *Les sous-espaces $Im\ f$ et $Ker\ f$ sont-ils supplémentaires ?*

Exercice 3 *Soient $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal á 2 et $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; P + 2P' = 0\}$.*

1. *Donner la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.*
3. *Soit l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, définie par $f(P) = P + 2P'$.*
   Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau $Ker\ f$.
4. *Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Cette matrice est-elle inversible ?*

Exercice 4 *Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire :*

$$(S_m) \left\{ \begin{array}{lcl} x+y+(1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x - y + 2z & = & 0 \\ 2\,x\ - my +\ 3\,z & = & m+2 \end{array} \right.$$

1. *En échelonnant la matrice A_m du système (S_m), déterminer les valeurs de m pour lesquelles le système (S_m) admet une solution unique.*
2. *Montrer que A_1 est inversible et déterminer son inverse A_1^{-1}.*
3. *Résoudre le système (S_1).*
4. *Résoudre les systèmes (S_2) et (S_{-2}).*

.... *Bonne Chance !* ....