$\mathscr{E}$xamen final

01 $\mathscr{J}$uin 2015 - Durée 1h30

Exercice

Les cinq parties sont indépendantes les unes des autres. Vous pouvez les traiter dans n'importe quel ordre.
Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ associer le vecteur

$$f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z, x+y-2z).$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. On note $f^2 = f \circ f$.

1.

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et donner sa dimension. En déduire le rang de l'application f.

(3) Montrer que $\operatorname{Im} f = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha+\beta+\gamma = 0\}$ et préciser une base. f est elle bijective ?

(4) Déterminer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$?

2.

(1) Déterminer la matrice $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base canonique $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)$ de f^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(2) Déterminer $f^2(x,y,z)$.

(3) Donner une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f^2$.

(4) Vérifier que $f(\operatorname{Ker} f^2) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

3.

(1) Soit $g : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = g(\operatorname{Ker} g^2)$.

(2) Dans le cas $E = F$, montrer que : $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g^2$ si et seulement si $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = E$.

4. On pose $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (-1,0,1)$ et $\varepsilon_3 = (-1,1,0)$

(1) Justifier que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{E}$, noté P.

(2) Pourquoi, la matrice P est inversible ? Calculer P^{-1}.

(3) Soit $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$. Donner la relation entre A, B et P et calculer B.

(4) Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\operatorname{Ker} f^n \cap \operatorname{Im} f^n$.

5. On considère le système $(\mathscr{S}_m)$ suivant :

$$(\mathscr{S}_m) \begin{cases} (m-1)x+y+z &= 1 \\ x+(m-1)y+z &= 1 \\ x+y+(m-1)z &= 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

(1) Ecrire le système $(\mathscr{S}_m)$ sous forme matricielle : $A_m X = b$ où A_m est une matrice à expliciter.

(2) Calculer le déterminant de A_m et donner une condition pour que $(\mathscr{S}_m)$ admette une solution unique.

(3) Résoudre suivant les valeurs du paramètre m le système $(\mathscr{S}_m)$.

Barème : **1.**(4,5)-**2.**(3,5)-**3.**(3)-**4.**(5)-**5.**(4).

Corrigé et Barême

01 Juin 2015 - Durée 1h30

Solution

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ associer le vecteur

$$f(x,y,z)=\left(-2x+y+z,x-2y+z,x+y-2z\right).$$

Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$. On note $f^2=f\circ f$.

1.

(1) **Montrer que f est une application linéaire.**
Solution : L'application f est linéaire. En effet, soit $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. On a

$$\lambda u+v=\Bigg(\underbrace{\lambda x+x'}_{X},\underbrace{\lambda y+y'}_{Y},\underbrace{\lambda z+z'}_{Z}\Bigg),$$

$$\begin{aligned}f(\lambda u+v)&=(-2X+Y+Z,X-2Y+Z,X+Y-2Z)\\&=\lambda\left(-2x+y+z,x-2y+z,x+y-2z\right)+\left(-2x'+y'+z',x'-2y'+z',x'+y'-2z'\right)\\&=\lambda f(u)+f(v)\end{aligned}$$

(2) **Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et donner sa dimension. En déduire le rang de l'application f.**
Solution : Soit

$$(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f\Leftrightarrow f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}-2x+y+z&=&0&\cdots L_1\\x-2y+z&=&0&\cdots L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\x+y-2z&=&0&\cdots L_3\leftarrow 2L_3+L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}-2x+y+z&=&0&\\-3y+3z&=&0&\cdots L_2\\3y-3z&=&0&\cdots L_3\leftarrow L_3+L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-2x+y+z&=&0\Rightarrow x=y=z\\-3y+3z&=&0\Rightarrow y=z\end{array}\right.$$

d'où

$$\operatorname{Ker} f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=y=z\right\}=\{(x,x,x):x\in\mathbb{R}\}=\langle a_1=(1,1,1)\rangle \text{ ave } \dim\operatorname{Ker} f=1$$

D'après le théorème du rang $\dim\operatorname{Ker} f+\operatorname{rg} f=\dim\mathbb{R}^3\Rightarrow\operatorname{rg} f=\dim\operatorname{Im} f=3-1=2.$

(3) **Montrer que** $\operatorname{Im} f=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3:\alpha+\beta+\gamma=0\right\}$ **et préciser une base. f est elle bijective ?**
Solution : Calculons l'image de f. Fixons $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$

$$(\alpha,\beta,\gamma)=f(x,y,z)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}-2x+y+z&=&\alpha&\cdots L_1\\x-2y+z&=&\beta&\cdots L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\x+y-2z&=&\gamma&\cdots L_3\leftarrow 2L_3+L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}-2x+y+z&=&\alpha&\\-3y+3z&=&2\beta+\alpha&\cdots L_2\\3y-3z&=&2\gamma+\alpha&\cdots L_3\leftarrow L_3+L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}-2x+y+z&=&\alpha\\-3y+3z&=&2\beta+\alpha\\0&=&2\alpha+2\beta+2\gamma\end{array}\right.$$

d'où

$$\operatorname{Im} f=\left\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3:\alpha+\beta+\gamma=0\right\}.$$

Soit

$$\begin{aligned}u=(\alpha,\beta,\gamma)\in\operatorname{Im} f&\Leftrightarrow u=(\alpha,\beta,-\alpha-\beta)\text{ puisque }\gamma=-\alpha-\beta\\&\Leftrightarrow u=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)\end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Im} f=\langle b_1=(1,0,-1),b_2=(0,1,-1)\rangle$$

les deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc (b_1,b_2) est une base pour $\operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Ker} f\neq\left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$ par exemple, où $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{R}^3$ alors f n'est pas bijective.

(4) **Déterminer** $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. **A-t-on** $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$?

Solution : Soit $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0$, d'où $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Oui, ona $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, pour cela, il suffit de montrer que (a_1, b_1, b_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On montre que le rang de la famille (a_1, b_1, b_2) est 3.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots L_1 & & 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \to & 0 & -1 & -2 & \cdots L_2 & \to & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots L_3 \leftarrow L_3 & & 0 & 1 & -1 & \cdots L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.

(1) **Déterminer la matrice** $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ **de** f **dans la base canonique** $\mathscr{B}$. **En déduire la matrice de** $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2)$ de f^2 dans la base $\mathscr{B}$.

Solution :

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$$

(2) Déterminer $f^2(x,y,z)$.

Solution :

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3f(x,y,z) \\ &= (6x-3y-3z, -3x+6y-3z, -3x-3y+6z) \end{aligned}$$

(3) **Donner une base et la dimension de** $\operatorname{Ker} f^2$.

Solution :Comme

$$A^2 = -3A$$

alors

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 = \langle a_1 = (1,1,1) \rangle \text{ don } \dim \operatorname{Ker} f^2 = 1 \text{ et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 = \langle b_1 = (1,0,-1), b_2 = (0,1,-1) \rangle$$

(4) **Vérifier que** $f(\operatorname{Ker} f^2) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ **et** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

Solution : On a $f(1,1,1) = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'où $f(\operatorname{Ker} f^2) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Comme $A^2 = -3A$, alors

$$\operatorname{Im} f^2 = \langle b_1 = (1,0,-1), b_2 = (0,1,-1) \rangle$$

3.

(1) **Soit** $g : E \to F$ **une application linéaire. Montrer que** $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = g(\operatorname{Ker} g^2)$.

Solution : Montrons que $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g \subset g(\operatorname{Ker}(g^2))$. Soit $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et $g(y) = 0_E$. Donc $g^2(x) = g(g(x)) = g(y) = 0_E$ i.e $x \in \operatorname{Ker}(g^2)$, comme $y = g(x)$ alors $y \in g(\operatorname{Ker}(g^2))$. Inversement, montrons $g(\operatorname{Ker}(g^2)) \subset \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g$. Soit $y \in g(\operatorname{Ker}(g^2))$, il existe $x \in \operatorname{Ker}(g^2)$ tel que $y = g(x)$ ce qui montre que $y \in \operatorname{Im} g$ et comme $g(y) = g(g(x)) = g^2(x) = 0_E$ on a $y \in \operatorname{Ker} g$.

(2) **Dans le cas** $E = F$, **montrer que :** $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g^2$ **si et seulement si** $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g = E$.

Solution :

4. On pose $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (-1,0,1)$ et $\varepsilon_3 = (-1,1,0)$

(1) **Justifier que** $\mathscr{E}$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$ **et donner la matrice de passage de la base** $\mathscr{B}$ **à la base** $\mathscr{E}$**, noté** P.

Solution : $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, pour cela il suffit de montrer que $\mathscr{E}$ est une famille libre, par exemple on calcule le determinant suivant par la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

$$P = P_{\mathscr{B},\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) **Pourquoi, la matrice P est inversible ? Calculer P^{-1}.**
Solution : P est inversible puisque $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille libre. On a

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3}\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3 \\ e_2 &= \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{2}{3}\varepsilon_3 \\ e_3 &= \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\varepsilon_3 \end{aligned}$$

d'où

$$P^{-1} = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) **Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$. Donner la relation entre A, B et P et calculer B.**
Solution :

$$\left(\mathbb{R}^3, \mathscr{E}\right) \underset{P=P_{\mathscr{B},\mathscr{E}}}{\longrightarrow} \left(\mathbb{R}^3, \mathscr{B}\right) \underset{A=Mat_{\mathscr{B}}(f)}{\longrightarrow} \left(\mathbb{R}^3, \mathscr{B}\right) \underset{P^{-1}=P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}}{\longrightarrow} \left(\mathbb{R}^3, \mathscr{E}\right)$$

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) **Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire** $\mathrm{Ker}\, f^n \cap \mathrm{Im}\, f^n$.
Solution : On a

$$\begin{aligned} A^2 &= (-3)^1 A \\ A^3 &= A^2 A = (-3A)\, A = -3A^2 = -3(-3A) = (-3)^2 A \end{aligned}$$

Ainsi de suite, on montre par récurrence sur n que

$$A^n = (-3)^{n-1} A$$

$$\mathrm{Ker}\, f^n \cap \mathrm{Im}\, f^n = f\left(\mathrm{Ker}\, f^{2n}\right),$$

Comme $\mathrm{Ker}\, f^{2n} = \mathrm{Ker}\, f$, en déduit que $\mathrm{Ker}\, f^n \cap \mathrm{Im}\, f^n = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

5. On considère le système $(\mathscr{S}_m)$ suivant :

$$(\mathscr{S}_m) \left\{ \begin{array}{rcl} (m-1)\,x + y + z &=& 1 \\ x + (m-1)\,y + z &=& 1 \\ x + y + (m-1)\,z &=& 1 \end{array} \right.$$

où m est un paramètre réel.

(1) **Ecrire le système $(\mathscr{S}_m)$ sous forme matricielle : $A_m X = b$ où A_m est une matrice à expliciter.**
Solution :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) **Calculer le déterminant de A_m et donner une condition pour que $(\mathscr{S}_m)$ admette une solution unique.**
Solution :

$$\begin{aligned} \det A_m &= \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= m^3 - 3m^2 + 4 \\ &= (m+1)(m-2)^2 \end{aligned}$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$, $\det A_m \neq 0$ et $(\mathscr{S}_m)$ est un système de Cramer.

(3) **Résoudre suivant les valeurs du paramètre m le système $(\mathscr{S}_m)$.**

Solution : Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$, l'unique solution de $(\mathscr{S}_m)$ est $\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$.

Si $m = -1$, La matrice $A_{-1} = A$ est semblable a la matrice B, donc

$$AX = b \Leftrightarrow BX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 & = & 1 \\ -3y & = & 1 \\ -3z & = & 1 \end{cases},$$

$(\mathscr{S}_{-1})$ n'admet aucune solution.

Si $m = 2$, on obtient $\{\ x + y + z \ = \ 1$, l'ensemble solution de $(\mathscr{S}_2)$ est

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\right\} = \{(1 - t - s, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$$