Rattrapage d'Algèbre I

Exercice1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = |x|$$

1. *f est-elle injective ? surjective ? justifier.*
2. *Montrer que $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.*
3. *Soient $A = [-2,0]$ et $B = [0,1]$, calculer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.*

Exercice2 :

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit sur E une relation binaire, notée $\mathcal{R}$ par :

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } (c,d) = (\lambda a, \lambda b)$$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer les classes de $(0,0)$ et $(1,2)$.*
3. *Que représente géométriquement la classe d'un élément $(a,b) \in E$?*

Exercice3 :

Soit $G = \mathbb{R}$. On définit sur G une loi de composition interne notée $*$ par :

$$\forall\, a,b \in G, a * b = a + b + \frac{1}{6}$$

1. *Montrer que $(G,*)$ est un groupe Abélien.*
2. *Soit* $f : (G,*) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$

   $$x \longmapsto f(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

   Montrer que f est un isomorphisme de groupes et donner l'expression de f^{-1}.

3. *Soit $H = \left\{\frac{2n-1}{6}, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Vérifier que $(H,*)$ est un sous groupe de $(G,*)$.*

4. *Soit* $g : (\mathbb{Z},+) \longrightarrow (H,*)$

   $$n \longmapsto g(n) = \frac{2n-1}{6}$$

   Montrer que g est un isomorphisme de groupes.

algebre_algebre@yahoo.fr
tiré du 8.

Bon courage !

corrigé (Rattrapage)

Exercice 1 :

(1) f non injective car $f(1)=f(-1)=1$ mais $1 \neq -1$.

f non surjective car pour $y=-1$ (par exemple), $-1=|x|$ (impossible à résoudre)

$\nexists x \in \mathbb{R} / \ y=f(x)$

(2) $f(\mathbb{R})=\{f(x) / x \in \mathbb{R}\} = \{|x| / x \in \mathbb{R}\} = [0;+\infty[$

(3) $A=[-2,0]$, $f(A)=\{f(x) / x \in [-2,0]\} = f([-2,0]) = [f(0), f(-2)]$

car f est décroissante sur $[-2,0]$ donc $f(A)=[0,2]$.

$f^{-1}(B)=\{x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0,1]\} = [-1,1]$

Exercice 2 : (1) $\mathcal{R}$ réflexive car $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ prendre $\lambda=1$.

$\mathcal{R}$ symétrique car : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$; $(c,d)=(\lambda a, \lambda b)$, $\lambda \neq 0$

donc $c=\lambda a$, $d=\lambda b \Rightarrow a=\frac{1}{\lambda}c$, $b=\frac{1}{\lambda}d$, $(a,b)=(\frac{1}{\lambda}c, \frac{1}{\lambda}d)$

donc $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

$\mathcal{R}$ transitive : $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ $(c,d)=(\lambda a, \lambda b)$ $c=\lambda a$, $d=\lambda b$

$(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ $(e,f)=(\lambda' c, \lambda' d)$

$\Rightarrow (e,f)=(\lambda'\lambda a, \lambda'\lambda b)$ (donc $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$ car $\lambda\lambda' \neq 0$.)

(2) $\overline{(0,0)}=\{(c,d)\in\mathbb{R}^2 / (0,0)\mathcal{R}(c,d)\}=\{(c,d)\in\mathbb{R}^2 / c=0, d=0\}=\{(0,0)\}$

$\overline{(1,2)}=\{(c,d)\in\mathbb{R}^2 / (1,2)\mathcal{R}(c,d)\}=\{(c,d)\in\mathbb{R}^2 / \begin{matrix} c=\lambda \\ d=2\lambda \end{matrix} \ \lambda\in\mathbb{R}^*\}$

$=\{\lambda(1,2) / \lambda\in\mathbb{R}^*\}$ = droite $y=2x$ privée du pt $(0,0)$.

(3) $\overline{(a,b)}=\{(c,d)\in\mathbb{R}^2 / \begin{matrix} c=\lambda a \\ d=\lambda b \end{matrix}, \lambda\in\mathbb{R}^*\}$.

$=\{\lambda(a,b) / \lambda\in\mathbb{R}^*\}$ (la droite de vecteur directeur (a,b) privée de $(0,0)$).

Exercice 3 :

(1) $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$ donc $a+b+\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$ donc $*$ interne

$*$ associative : $a*(b*c)=a*(b+c+\frac{1}{6})=a+b+c+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ ... (1)

$(a*b)*c=(a+b+\frac{1}{6})*c = a+b+\frac{1}{6}+c+\frac{1}{6}$ ... (2)

(1) = (2) donc $*$ associative.

$*$ commutative car $a*b=a+b+\frac{1}{6}=b+a+\frac{1}{6}=b*a$.

$\exists e\in\mathbb{R}, \forall a\in\mathbb{R} \ / \ a*e=a$ (à droite seulement car $*$ commutative)

$a*e=a \Leftrightarrow a+e+\frac{1}{6}=a \Rightarrow \boxed{e=-\frac{1}{6}}$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists a' \in \mathbb{R} /\ a * a' = -\frac{1}{6}$ (le symétrique à droite seulement car $*$ commutative).

$a + a' + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$ ∴ $\boxed{a' = -\frac{1}{3} - a}$

(2) $f(x*y) = f\left(x+y+\frac{1}{6}\right) = 3\left(x+y+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2} = 3x+3y+1$ ... ①

$f(x)+f(y) = 3x+\frac{1}{2}+3y+\frac{1}{2} = 3x+3y+1$ ... ②

① = ② donc f est un homomorphisme de groupes.

Montrons que f est bijective :

$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists ?\ x \in \mathbb{R} /\ y = f(x),\ y = 3x+\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{1}{6}$

x existe et il est unique donc f bijective et donc :

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$

(3) $H \neq \phi$, $e = -\frac{1}{6} \in H$ car $e = \frac{2.0-1}{6} = -\frac{1}{6}$.

$x \in H, y \in H \quad x * sym(y) \in H$?.

$x = \frac{2n-1}{6}$, $y = \frac{2m-1}{6}$, $sym(y) = -\frac{1}{3} - y = \frac{-1-2m}{6}$

$x * sym(y) = \frac{2n-1}{6} * \frac{-1-2m}{6} = \frac{2n-1}{6} + \frac{-1-2m}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2(n-m)-1}{6} \in H$

$(n-m \in \mathbb{Z})$.

(4) $g(n+m) = \frac{2(n+m)-1}{6}$ ... ①

$g(n) * g(m) = \frac{2n-1}{6} * \frac{2m-1}{6} = \frac{2n-1}{6} + \frac{2m-1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2n+2m-1}{6}$ ... ②

① = ② donc g est un de groupes.

g est bijective car : $\forall y \in H,\ y = \frac{2n-1}{6}\ \exists n \in \mathbb{Z} /\ g(n) = \frac{2n-1}{6}$.

(on l'appelle surjective par construction)

$y = \frac{2n-1}{6} \Rightarrow n = \frac{6y+1}{2} \in \mathbb{Z}$, n est donc unique donc g injective !

donc g est un isomorphisme de groupes.