USTHB
Faculté de Mathématiques

Année 2015/2016
MI, Sections 4, 5, 8

Epreuve Finale d'Analyse 1

Exercice 1 : Soit A l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{a^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+$$

1. On suppose que $a \in [0,1]$.
   (a) Montrer que A est borné.
   (b) Déterminer $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ et $\max A$ s'ils existent.
2. On suppose maintenant que $a > 1$. A est-il borné ? justifier votre réponse.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \frac{2u_n}{u_n^2+1},\ n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $0 < u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 : Soient a un nombre réel strictement positif et f une fonction dérivable sur $[0,a]$ vérifiant $f(0) = f'_d(0) = f(a) = 0$. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0,a]$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , \text{ si } x \neq 0, \\ 0 & , \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1- Montrer que la fonction g est continue sur $[0,a]$ et qu'elle est dérivable sur $]0,a[$.

2- *Montrer qu'il existe* $c \in]0,a[$ tel que $f(c) = cf'(c)$.

3- *Déduire qu'il existe un point du graphe de la fonction* f tel que la tangente en ce point passe par l'origine.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\mathrm{Log}(1+x)}$

1. Peut-on prolonger f par continuité au point $x_0 = 0$?
2. Si oui, le prolongement de f, est-il dérivable en $x_0 = 0$?

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène
Faculté de Mathématiques

Module : Analyse I, **1ère année MI, Section : 7.** **Année scolaire : 2015/2016**
Durée : 01h30.

Examen final

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - n}{b^n + n}$, où a et b sont des réels strictement positifs (Indication : distinguer le cas $b > 1$ du cas $b \leq 1$).
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\sqrt{\ln(x^2+1)}}{\sin x + e^{\cancel{3-x}}_{x-3}}$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} \dfrac{\sqrt{x} - e^{1/2} - \sqrt{x-e}}{\sqrt{x^2 - e^2}}$.

Exercice 2 :

On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x = 0 \\ \frac{1}{2} - x & \text{, si } x \in]0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{, si } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x & \text{, si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & \text{, si } x = 1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f sur $[0,1]$
2) Démontrer que, pour tout $x \in \left[0,1\right]$: $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

Exercice 3 :

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1.$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, f_n est une fonction strictement croissante sur $[0,1]$.
2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, \frac{1}{2}[$ que l'on notera x_n.
3) Vérifier que, pour chaque x fixé dans $[0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (c'est-à-dire, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$).
4) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (Indication : vérifier que $x_n \in]0, x_{n+1}]$).
5) En citant proprement le résultat utilisé, en déduire que (x_n) est une suite convergente.
6) Par la méthode d'encadrement, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. Puis, en déduire la limite de la suite (x_n).

Bonne chance.

Module : Analyse I, 1ère année MI, Section : 7. Année scolaire : 2015/2016
Durée : 01h30.

Corrigé de l'examen final

Exercice 1 : 6pt

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-n}{b^n+n}$, où a et $b>0$

1er cas : Si $0<b\leq 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-n}{b^n+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n}-1=\begin{cases}0 \text{ si } 0<a\leq 1\\ +\infty \text{ si } a>1.\end{cases} \quad \textbf{1.5pt}$$

2ème cas : Si $b>1$, alors :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-n}{b^n+n} &= (\lim_{n\to+\infty}\tfrac{a^n}{b^n}-\tfrac{n}{b^n})(\lim_{n\to+\infty}\tfrac{1}{1+\frac{n}{b^n}})\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{b^n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{b^n} \quad \textbf{2pt}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{b^n}=\begin{cases}0 \text{ si } 0<a<b\\ +\infty \text{ si } a>b.\\ 1 \text{ si } a=b\end{cases}\end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{\ln(x^2+1)}}{\sin x+e^{x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{\ln(x^2+1)}}{e^{x-3}}.\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{e^{x-3}}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}\frac{x^2\sqrt{\ln(x)}}{e^{x-3}}=0$ (l'exponentiel l'emporte sur les autres) **1pt.**

$$\begin{aligned}\lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac{\sqrt{x}-e^{1/2}-\sqrt{x-e}}{\sqrt{x^2-e^2}} &= \lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac{\sqrt{x}-e^{1/2}}{\sqrt{x^2-e^2}}-\lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac{\sqrt{x-e}}{\sqrt{x^2-e^2}}\\ &= \lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac{\sqrt{x-e^1}}{(\sqrt{x}+e^{1/2})\sqrt{x+e}}-\lim_{x\overset{>}{\to}e}\frac{1}{\sqrt{x+e}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}\end{aligned} \quad \textbf{1,5pt.}$$

Exercice 2 : 5pt

1) Pour la continuité de f sur $[0,1]$, on a :

- Au point $x_0=0$, f est discontinue car :. $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\neq f(0)$. **0,5pt**
- Au point $x_0=0$, f est discontinue, car $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ et

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{2}-x=0 \text{ et } \lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}\frac{3}{2}-x=1. \quad \textbf{1pt}$$

- En $x_0=1$, f est discontinue car :. $f(1)=1$ et $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{3}{2}-x=\frac{1}{2}\neq f(1)$. **0,5pt**
- Sur $]0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[$, f est une fonction polynômiale donc continue. **0,5pt**

2) f est définie par morceaux, ce qui nous amène à vérifier cette égalité sur chaque morceau. En effet, on a :

- Si $x=0$ alors $f(0)=0$ et $\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}E(2x)-\frac{1}{2}E(1-2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E(0)-\frac{1}{2}E(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. **0,5pt**
- Si $x=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}E(2x)-\frac{1}{2}E(1-2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}E(1)-\frac{1}{2}E(0)=\frac{1}{2}$. **0,5pt**
- Si $x\in]0,\frac{1}{2}[$, alors : $0<2x<1$ et $0<1-2x<1$. Donc $E(2x)=E(1-2x)=0$. **0,75pt**
- Si $x\in]\frac{1}{2},1[$, alors : $1<2x<2$ et $-1<1-2x<0$. Donc $E(2x)=1$ et $E(1-2x)=-1$. **0,75pt**

Exercice 3 : 9pt

On a pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$: $f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$.

1) Pour la croissance stricte de f_n sur $[0,1]$:

$$f_n(x) - f_n(y) = x^n - y^n + 2\left(x^2 - y^2\right) + x - y = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1} + x + y + 1\right).$$

Comme $x, y \in [0,1]$, alors le signe de $f_n(x) - f_n(y)$ dépend de celui de $(x-y)$. D'où f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. **1pt**

On peut aussi utiliser le signe de la dérivée de f_n, puisque :

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 > 0 \text{ sur } [0,1].$$

2) Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f_n sur $[0, \frac{1}{2}]$. On a :

- f_n est une fonction polynômiale, donc elle est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$. **0,25pt**
- $f_n(0) = -1$ et $f_n(1/2) = (1/2)^n$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. **0,5pt**

Le **T.V.I** est donc applicable et comme f_n est strictement croissante sur $[0,1]$, alors x_n existe de façon unique. **0.75pt**

3) La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, car :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0 \text{ sur } [0,1]. \textbf{ 1pt}$$

4) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, car il est possible de montrer par le **T.V.I** que $x_n \in]0, x_{n+1}]$. En effet, de la question **3)**, on a : **0,5+0,5pt**

$$f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) \text{ et } f_n(x_n) = 0 \Rightarrow f_n(x_{n+1}) \leq 0. \textbf{ 0,25pt}$$

Donc $f_n(0) . f_n(x_{n+1}) = (-1) . f_n(x_{n+1}) \leq 0$ **0,25pt**

5) Les conditions suffisantes du **théorème des suites monotones** sont vérifiées par la suite (x_n), puisque :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée d'après la question **2)**, $x_n \in]0, 1/2]$. **0,25pt**
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante d'après la question **4)**. **0,25pt**

Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in [0, 1/2]$. **0.5pt**

6) Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$, on peut le déduire du fait que : $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

et aussi que : $0 \leq (x_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$. Par passage à la limte sur n, on déduit, à l'aide de **la méthode de l'encadrement**, que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$ **1pt**

Il reste à calculer la valeur de l, on a :

$$f_n(x_n) = (x_n)^n + 2(x_n)^2 + x_n - 1 \text{ pour tout } n \geq 1. \textbf{ 0,25pt}$$

Comme $f_n(x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$, alors l est solution de l'équation

$$2l^2 + l - 1 = 0. \textbf{ 0,75pt}$$

Cette équation admet deux solutions $l_1 = 1/2$ et $l_2 = -1$. Comme $l \in [0, 1/2]$, alors $l = l_1$. **1pt**