Faculté de Mathématiques
USTHB
$1^{\text{ère}}$ année MI

Analyse I
Examen final
Sections 2 et 4

Année Universitaire
2013-2014
Durée 1 h 30 min

Exercice 1 (5 points) *Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par :*

$$u_0 = 1 \text{ et}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$$

1. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq 1$.
2. *Montrer que (u_n) est monotone. En déduire qu'elle est convergente puis calculer sa limite.*
3. *Soit* $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. *Determiner* $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

Exercice 2 (5 points) *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \arctan(\frac{1}{x^2})$$

1. *Etudier la continuité de f sur son domaine définition.* 1
2. *Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note par g son prolongement.* 2
3. *Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ ainsi que $g'(0)$. La dérivée g' est elle continue au point 0.*
4. *Peut-on appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $[-1, 1]$.* 1

   On donne $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 (10 points) *Soient f et h les fonctions réelles d'une variable réelle définies par* $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ *et* $h(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$.
On considère la suite numérique définie par

$$U_0 = 0, U_{n+1} = f(U_n).$$

1. *Enoncer la formule de Mac-Laurin- Lagrange à l'ordre n puis montrer que*
$$1 + x + \frac{x^3}{3!} \leq f(x) \leq 1 + x + \frac{x^3}{3!}e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
2. *Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$. (Dresser un tableau de variations.)*
3. *En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}^+$.*
4. *Que peut-on en déduire sur la nature de la suite (U_n) ? Justifier la réponse.*
5. *Montrer que la suite (U_n) est croissante.*
6. *Montrer que* $U_n \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
7. *Que peut-on dire sur* $\inf U_n, \min U_n, \sup U_n$, *et* $\max U_n$?
8. *On pose* $W_n = (-1)^n U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.*Que peut-on dire sur* $\inf W_n, \min W_n, \sup W_n$, *et* $\max W_n$?
9. *On pose*
$$g(x) = 1 + x + x^3 e^x$$
et on considère la suite numérique définie par
$$V_0 = 0, V_{n+1} = g(V_n).$$
Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty.$$
Indication : *On pourra montrer que* $g(x) \geq f(x)$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *et que* $V_n \geq U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Bon courage

Faculté de Mathématiques USTHB $1^{\text{ère}}$ année MI	Analyse I Corrigé de l'examen final Sections 2 et 4	Année Universitaire 2013-2014 Durée 1 h 30 min

Exercice 1 (5 points) *Lorsqu'il s'agit d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ il faut toujours etudier les variations de f. Ici $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$.*

1. *f est continue dérivable sur $]0,1]$ et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2} > 0$ donc f est stictement croissant sur $]0,1]$.*

2. *Par récurrence on a $U_0 = 1 \in]0,1]$. Supposons que $0 < u_n \leq 1$, comme f est strictement croissante on a $f(0) = \frac{1}{3} < f(u_n) \leq f(1) = \frac{2}{4}$ et donc $0 < u_{n+1} \leq 1$, par suite $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 0$.* **(1 point)**

3. *f est strictement croissante donc (u_n) est monotone en particulier $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$, la suite est donc décroissante, et comme elle est minorée on déduit qu'elle est convergente. Soit l sa limite donc l vérifie $0 \leq l \leq 1$ et $l = f(l)$.*

   ce qui conduit à résoudre $l^2 + 2l - 1 = 0$ ce qui donne $l_1 = -\sqrt{2} - 1 < 0$ et $l_1 = \sqrt{2} - 1 \in [0,1]$ et donc $\lim u_n = \sqrt{2} - 1$. **($1 + 0.5 + 0.5$ point)**

4. *$U_0 = 0 \in A$ donc $A \neq \phi$. Comme (u_n) est décroissante on a $\inf A = \lim u_n = \sqrt{2} - 1$, $\min A$ n'existe pas car sinon la suite sera constante. $\sup A = \max A = U_0 = 0$ car $U_0 = 0 \in A$.* **(4×0.5 point)**

Exercice 2 (5 points)

1. *$D_f = \mathbb{R}^*$. f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car elle est produit d'une fraction rationnelle ($x \rightsquigarrow \frac{x^2}{x^2+1}$ avec $x^2 + 1 \neq 0$) par la fonction ($x \rightsquigarrow \arctan(\frac{1}{x^2})$ avec $x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^*$).* **(2×0.5 point)**

2. *$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(\frac{1}{x^2}) = \frac{\pi}{2}$, donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prongement est $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1}\arctan(\frac{1}{x^2}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.* **($2 \times 0.5$ point)** .

3. *Sur $\mathbb{R}^*$, $g = f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car elle est produit d'une fraction rationnelle ($x \rightsquigarrow \frac{x^2}{x^2+1}$ avec $x^2 + 1 \neq 0$) par la fonction ($x \rightsquigarrow \arctan(\frac{1}{x^2})$ avec $x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^*$) qui sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a $g'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}\arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^3}{(x^2+1)(x^4+1)}$.*

   Dérivabilité en 0 : on $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1}\arctan(\frac{1}{x^2}) = 0$ donc g est dérivable en 0 et on a $g'(0) = 0$.

   $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\arctan\frac{1}{x^2} - \frac{2x^3}{(x^2+1)(x^4+1)} \right) = 0 = g'(0)$, par suite g' est continue au point 0. **(4×0.5 point)**

4. *La fonction g est continue sur $[-1,1]$, dérivable $]-1,1[$sur et $g(-1) = g(1) = \frac{\pi}{8}$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle à g sur l'intervalle $[-1,1]$.* *(1 point)*

Exercice 3 (10 points)

1. *Formule de Mac-Laurin- Lagrange c'est la formule de Taylor- Lagrange sur $[0,x], x > 0$. Si f est de classe C^n sur $[0,x]$ et la dérivée d'ordre $n+1$ existe sur $]0,x[$ alor il existe $c \in]0,x[$ tel que* *(1 point)*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

On applique cette formule à f à l'ordre 2. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - x$, $f''(x) = e^x - 1$ et $f^{(3)}(x) = e^x$ donc il existe $c \in]0,x[$tel que $f(x) = 1 + x + \frac{e^c}{3!}x^3$ de plus $1 < e^c < e^x$ et on a

$$1 + x + \frac{x^3}{3!} \leq f(x) \leq 1 + x + \frac{x^3}{3!}e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

cette relation reste vraie si $x = 0$ auquel cas on a égalité. *(1 point)*

2. *h continue dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(x) = e^x - x - 1$, or d'aprés l'inegalité 1 on a $h'(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \geq 0$, par suite h est croissante de $[0,+\infty[$ à valeur dans $[h(0), \lim_{x\to+\infty} h(x)[= [1,+\infty[$.* *(1 point)*

3. *l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $h(x) = 0$ or $h(x) \geq 1 > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc elle n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}^+$.* *(1 point)*

4. *La suite (U_n) est divergente car sinon sa limite serait solution de $f(x) = x$ qui d'après 3 n'existe pas.* *(1 point)*

5. *D'après l'inégalité en 1, $f(x) \geq x$, donc $U_{n+1} = f(U_n) \geq U_n$ par suite (U_n) est croissante.* *(1 point)*

6. *Par récurrence pour $n = 0$ on a $U_0 = 0 \geq 0$. On suppose que $U_n \geq n$ et on montre que $U_{n+1} \geq n+1$. D'après l'inégalité en 1, $f(x) \geq x + 1$, donc $U_{n+1} = f(U_n) \geq U_n + 1 \geq n+1$, d'où le résultat.* *(1 point)*

7. *Comme (U_n) est croissante et $U_n \geq n$ on a $\lim U_n = +\infty$. donc $\inf U_n = \min U_n = U_0 = 0$, $\sup U_n = \lim U_n = +\infty$ et $\max U_n$ n'existe pas (pour la section 2 $\sup U_n$, et $\max U_n$ n'existent pas).* *(1 point)*

8. *D'après 6 $W_{2n} = U_{2n} \geq 2n$ et $W_{2n+1} = -U_{2n+1} \leq 2n+1$ donc (W_n) n'est ni majorée ni minorée par suite $\inf W_n, \min W_n, \sup W_n$, et $\max W_n$ n'existent pas.* *(0.5 point)*

9. *Tout d'abrod la fonction f est croissante car $f'(x) = h'(x) + 1 \geq 0$. de plus $g(x) = 1+x+x^3e^x \geq 1+x+\frac{x^3}{3!}e^x \geq f(x)$.donc on montrera par récurrence que $V_n \geq U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$* **(1 point)**

pour $n = 0$ on a $V_0 = 0 \geq U_0 = 0$. On suppose que $V_n \geq U_n$. comme f est croissante on a $f(V_n) \geq f(U_n)$ et donc $V_{n+1} = g(V_n) \geq f(V_n) \geq f(U_n) = U_{n+1}$ et on conclut par le principe de récurrence que $V_n \geq U_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Finalement *$\lim_{n\to+\infty} V_n \geq \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.* *(1.5 point)*