$\mathcal{E}$xamen final

10 $\mathcal{J}$anvier 2016 - Durée 1h30

Exercice 1.

(1) *Soient* P *et* Q *deux assertions. Montrer que* $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ *est une tautologie.*

(2) *Ecrire la négation logique de la proposition* $A : \forall x \in \mathbb{R}, \left(x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0\right)$.

(3) *Soit* $B : \forall x, y \in \mathbb{R}, ((x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0)$. *Montrer que* $B \Rightarrow A$.

Exercice 2.

(1) *Soient* E *et* F *deux ensembles finis et* $f : E \to F$ *une application. Soit* $B \in \mathcal{P}(F)$, *où* $\mathcal{P}(F)$ *désigne l'ensemble des parties de* F.

(a) *Démontrer qu'un ensemble fini de cardinal* n *a* 2^n *sous-ensembles.* *Combien y a-t-il d'applications de* E *dans* F?

(b) *Rappler la définition de l'image réciproque* $f^{-1}(B)$, *de* B *par* f.

(c) *Montrer que* $\forall B \in \mathcal{P}(F) : f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(2) *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $\varphi(x, y) = (x^2 + y, -x + y)$.

(a) *Soit* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. *Déterminer* $\varphi^{-1}(\{(u, v)\})$.

(b) φ *est-elle injective ? surjective ?*

(3) *Soient* $\alpha : E \to F$, $\beta : F \to G$ *et* $\gamma : G \to H$. *On suppose que* $\beta \circ \alpha$ *et* $\gamma \circ \beta$ *sont bijectives.* *Démontrer que* α, β *et* γ *sont bijectives.*

Exercice 3. *Sur l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs, on définit deux relations, notées respectivement* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{T}$, *de la façon suivante :*

$x \mathcal{R} y$ *quand la somme* $x + y$ *est paire*

$x \mathcal{T} y$ *quand la différence* $x - y$ *est paire*

(1) *Ces relations sont-elles égales ?*

(2) *Démontrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence. Décrire ses classes d'équivalence.*

Exercice 4. *On définit sur* $\mathbb{R}$, *la loi de composition* $\star$ *par :* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \star y = x + y - 2$.

(1) *Montrer que* $(\mathbb{R}, \star)$ *est un groupe abélien.*

(2) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $x^{(1)} = x$ *et* $x^{(n+1)} = x^{(n)} \star x$

(a) *Calculer* $x^{(2)}, x^{(3)}$ *et* $x^{(4)}$.

(b) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^* : x^{(n)} = nx - 2(n-1)$.

(3) *Soit* $A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ est pair}\}$. *Montrer que* $(A, \star)$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{R}, \star)$.

* * * * * * *

Barême : Exercice 1. (4 pts), Exercice 2. (7 pts), Exercice 3. (4 pts), Exercice 4. (5 pts).