Faculté de mathématiques
1ère Année Lic MI
Section 5

USTHB

Année: 2013 – 2014
Module: ALG 1
12 Janvier 2014

# EPREUVE FINALE

> Aucun document ni aucun appareil électronique ne seront autorisés.
> L'usage du stylo rouge et de l'effaceur est strictement interdit.

---

**Exercice 1 (3,5 pts)** Soient $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ deux applications vérifiant $f \circ g = I_F$, où $I_F$ désigne l'application identité de $F$.

1. Montrer que $f$ est surjective. (1 pt)
2. Montrer que $g$ est injective. (1 pt)
3. Supposons qu'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ vérifiant: $h \circ f = I_E$ où $I_E$ désigne l'application identité de $E$. Montrer que $h = g$. (1,5 pts)

---

**Exercice 2 (4,5 pts)** On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi de composition interne notée $*$ par

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc - ad).$$

1. La loi $*$ est-elle associative? (2 pts)
2. La loi $*$ admet-elle un élément neutre? (2 pts)
3. La loi $*$ est-elle commutative? (0,5 pt)

---

**Exercice 3 (12 pts)** On note $\mathbb{A} = \{a + b\sqrt{3} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. (2,5 pts)
2. Soit l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ a + b\sqrt{3} &\longmapsto a - b\sqrt{3} \end{aligned}$$
   (a) Montrer que $f$ est un homomorphisme d'anneaux. (2,5 pts)
   (b) Déterminer $\ker f$. (1 pt)
3. Montrer que $2 + \sqrt{3}$ est inversible dans $A$. (1 pt)
4. On définit sur $\mathbb{A}$ la relation $\mathcal{R}$ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{A}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{A},\ x = y + 5\alpha.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. (1,5 pt)
   (b) Soient $x, y, z, t \in \mathbb{A}$, montrer que si $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t$ alors $xz\mathcal{R}yt$. (1 pt)
5. On définit sur $\mathbb{A}$ la relation $\mathcal{S}$ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{A}, \quad x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre. (1,5 pt)
   (b) L'ordre est-il total? (1 pt)

Faculté de mathématiques
1ère Année Lic MI
Section 5

USTHB

Année: 2013 – 2014
Module: ALG 1
12 Janvier 2014

# CORRIGE DE L'EPREUVE FINALE

**Exercice 1 (3,5 pts)** Soient $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow E$ deux applications vérifiant $f \circ g = I_F$. où $I_F$ désigne l'application identité de $F$.

1. Soit $y \in F$, montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a par hypothèse $f \circ g = I_F$, donc $f(g(y)) = y$. Il suffit donc de prendre $x = g(y)$. L'application $f$ est donc surjective. (1 pt)

2. Soit $y_1, y_2$ deux éléments de $F$

$$g(y_1) = g(y_2) \Longrightarrow f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Longrightarrow (f \circ g)(y_1) = (f \circ g)(y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2$$

l'application $g$ est donc injective. (1 pt)

3. $f \circ g = I_F \Longrightarrow h \circ (f \circ g) = h \circ I_F \Longrightarrow (h \circ f) \circ g = h \Longrightarrow I_E \circ g = h \Longrightarrow g = h$. (1,5 pts)

**Exercice 2 (4,5 pts)** 1. La loi $*$ est-elle associative? (2 pts)

$*$ est associative si $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}((a,b)*(c,d))*(e,f) &= (ac, bc-ad)*(e,f) = (ace, bce-ade-acf)\\ (a,b)*((c,d)*(e,f)) &= (a,b)*(ce, de-cf) = (ace, bce-ade+acf)\end{aligned}$$

Si $acf \neq 0$ alors $((a,b)*(c,d))*(e,f) \neq (a,b)*((c,d)*(e,f))$.
exemple:

$$\begin{aligned}((1,1)*(1,1))*(1,1) &= (1,0)*(1,1) = (1,-1)\\ (1,1)*((1,1)*(1,1)) &= (1,1)*(1,0) = (1,1)\end{aligned}$$

la loi $*$ n'est pas associative.

2. La loi $*$ admet-elle un élément neutre? (2 pts)
La loi $*$ admet un élément neutre s'il existe $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)*(e_1,e_2) = (a,b) \text{ et } (e_1,e_2)*(a,b) = (a,b)$$

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)*(e_1,e_2) &= (a,b) \Longleftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (ae_1, be_1 - ae_2) = (a,b)\\ &\Longleftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ae_1 = a \text{ et } be_1 - ae_2 = 0\\ &\Longleftrightarrow (e_1,e_2) = (1,0)\end{aligned}$$

Mais $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(1,0)*(a,b) = (a,-b)$ par exemple

$$(1,0)*(1,1) = (1,-1) \neq (1,1)$$

$*$ n'admet pas d'élément neutre.

3. $(1,0)*(1,1) = (1,-1)$ et $(1,1)*(1,0) = (1,1)$. La loi $*$ n'est pas commutative. (0,5 pt)

**Exercice 3 (12 pts)** On note $\mathbb{A} = \left\{a + b\sqrt{3} \ / \ a,b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. (2,5 pts)

- $1 = 1 + 0 \times \sqrt{3} \in \mathbb{A}$.
- Soient $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et $x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$ deux éléments de $\mathbb{A}$

$$x - y = \left(a + b\sqrt{3}\right) - \left(c + d\sqrt{3}\right) = (a-c) + (b-d)\sqrt{3}$$

On a $(a-c) \in \mathbb{Z}$ et $(b-d) \in \mathbb{Z}$ donc

$$x - y = (a-c) + (b-d)\sqrt{3} \in \mathbb{A}$$

$$xy = \left(a + b\sqrt{3}\right)\left(c + d\sqrt{3}\right) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

2. (a) Montrer que $f$ est un homomorphisme d'anneaux. (2,5 pts)

- $f(1) = f(1 + 0 \times \sqrt{3}) = 1 - 0 \times \sqrt{3} = 1$
- Soit $x = a + b\sqrt{3}$, $y = a' + b'\sqrt{3}$ deux éléments de $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(a + b\sqrt{3} + a' + b'\sqrt{3}\right) = f\left((a+a') + (b+b')\sqrt{3}\right) \\ &= (a+a') - (b+b')\sqrt{3} = \left(a - b\sqrt{3}\right) + \left(a' - b'\sqrt{3}\right) = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

- Soit $x = a + b\sqrt{3}$, $y = a' + b'\sqrt{3}$ deux éléments de $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} f(xy) &= f\left(\left(a + b\sqrt{3}\right)\left(a' + b'\sqrt{3}\right)\right) = f\left((aa' + 3bb') + (ab' + ba')\sqrt{3}\right) \\ &= (aa' + 3bb') - (ab' + ba')\sqrt{3} = \left(a - b\sqrt{3}\right)\left(a' - b'\sqrt{3}\right) = f(x) f(y) \end{aligned}$$

(b) $\ker f = \{x \in \mathbb{A} / f(x) = 0\}$. Soit $x = a + b\sqrt{3} \in \mathbb{A}$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow a - b\sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ car } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x = 0$$

donc $\ker f = \{0\}$ **(1 pt)**

3. $(2+\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \in \mathbb{A}$. $(2+\sqrt{3})$ est donc inversible dans $\mathbb{A}$ **(1 pt)**

4. (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. **(1,5 pt)**

- Soit $x \in \mathbb{A}$, $x = x + 5 \times 0$, $0 \in \mathbb{A}$ car $\mathbb{A}$ est un sous-anneau, donc $x\mathcal{R}x$. La trelation $\mathcal{R}$ est réflexive
- Soient $x, y \in \mathbb{A}$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{A},\ x = y + 5\alpha \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{A},\ y = x + 5(-\alpha)$
  Posons $\alpha' = -\alpha \in \mathbb{A}$ car $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ par suite $y\mathcal{R}x$. La trelation $\mathcal{R}$ est symétrique
- Soient $x, y, z \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{A},\ x = y + 5\alpha \\ \exists \alpha' \in \mathbb{A},\ y = z + 5\alpha' \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{A},\ x + y = y + z + 5(\alpha + \alpha') \\ &\Longrightarrow \exists \alpha'' \in \mathbb{A},\ x = z + 5\alpha'' \ (\alpha'' = \alpha + \alpha') \Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

La trelation $\mathcal{R}$ est transitive.

(b) Soient $x, y, z, t \in \mathbb{A}$, montrer que si $x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}t$ alors $xz\mathcal{R}yt$. **(1 pt)**

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ z\mathcal{R}t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{A},\ x = y + 5\alpha \\ \exists \alpha' \in \mathbb{A},\ z = t + 5\alpha' \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha, \alpha' \in \mathbb{A},\ xz = yt + 5(y\alpha' + \alpha t + 5\alpha\alpha')$$

$y, t, \alpha, \alpha'$ sont des éléments de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ donc $y\alpha' + \alpha t + 5\alpha\alpha' \in \mathbb{A}$. on posons $\alpha'' = y\alpha' + \alpha t + 5\alpha\alpha'$, alors $xz = yt + 5\alpha''$. D'où $xz\mathcal{R}yt$

5. (a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre. **(1,5 pt)**

- Soit $x \in \mathbb{A}$, $x - x = 0 + 0 \times \sqrt{3}$, $0 \in \mathbb{N}$ donc $x\mathcal{R}x$. La trelation $\mathcal{R}$ est réflexive
- Soient $x, y \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{S}x \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3} \\ \exists n', m' \in \mathbb{N},\ y - x = n' + m'\sqrt{3} \end{cases} \\ &\Longrightarrow \exists n, m, n', m' \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3} \text{ et } 0 = (n + n') + (m' + m)\sqrt{3} \\ &\Longrightarrow \exists n, m, n', m' \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3} \text{ et } n + n' = 0 \text{ et } m + m' = 0 \ \left(\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\right) \\ &\Longrightarrow \exists n, m, n', m' \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3} \text{ et } n = n' = 0 \text{ et } m = m' = 0 \Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

La trelation $\mathcal{S}$ est antisymétrique

- Soient $x, y, z \in \mathbb{A}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{S}y \\ y\mathcal{S}z \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \exists n, m \in \mathbb{N},\ x - y = n + m\sqrt{3} \\ \exists n', m' \in \mathbb{N},\ y - z = n' + m'\sqrt{3} \end{cases} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \exists n, m, n', n'' \in \mathbb{N},\ x - z = (n + n') + (m + m')\sqrt{3} \\ &\Longrightarrow \exists n'', m'' \in \mathbb{N},\ x - z = n'' + m''\sqrt{3} \Longrightarrow x\mathcal{S}z \end{aligned}$$

La trelation $\mathcal{S}$ est transitive.

(b) L'ordre est-il total? **(1 pt)**

l'ordre n'est pas total : pour $x = 1 + 4\sqrt{3}$ et $y = 2 + \sqrt{3}$. On a $x - y = (-1) + 3\sqrt{3}$ et $y - x = 1 - 3\sqrt{3}$ donc $x \not\mathcal{S} y$ et $y \not\mathcal{S} x$