

Exercice 1 :

1°/ Montrer que la fonction suivante est primitive réursive (PR).

$$eq(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

2°/ Montrer la relation suivante, en considérant $div(n, m)$ comme la division entière de n par m :

$$div(n+1, m) = div(n, m) + eq(m * (1 + div(n, m)), n+1)$$

3°/ Montrer que $div(n, 3)$ est Primitive Réursive. *en utilisant la question 2.*

Toutes les fonctions PR, vue en cours, peuvent être utilisées à part le reste de la division de x par y .

Exercice n°2 :

On désire représenter les entiers relatifs par la machine de Turing en adoptant la convention suivante :

- Un nombre $n > 0$ est représenté par le symbole '+' suivi de $(n+1)$ barres.
- Un nombre $n < 0$ est représenté par le symbole '-' suivi de $(n+1)$ barres.
- Le nombre 0 est représenté par +1 ou -1.

Ecrire la machine de Turing qui calcule la fonction suivante :

$$F(x, y) = \begin{cases} (x \bmod 3, y) & \text{si } x > y \\ P_{2,2}(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Où $P_{i,n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ correspond à la fonction projection du $i^{\text{ème}}$ élément parmi n .

Exemples : $F(+4, -2)$

0	+	1	1	1	1	1	+	-	1	1	1	0
0	+	1	1	1	1	1	-	1	1	1	0	

$F(-3, +5)$

0	-	1	1	1	1	1	+	1	1	1	1	1	0
0	+	1	1	1	1	1	1						

Exercice n°3 :

1. Soient les fonctions suivantes en Caml Light :

```
# let lg x = string_length x ;;
# let souschaîne x = sub_string x 1 (lg x-1) ;;
# let rec f x = if x="" then [] else if x.[0] >= '0' & x.[0] <= '9' then
  (int_of_char(x.[0]) - 48) :: f(souschaîne x) else f(souschaîne x) ;;
```

1.1 Donner le type inféré par la fonction f.

1.2 Calculer f "1ad2b3c" ;;

1.3 Que fait la fonction f ?

Remarque : Les codes ASCII des caractères 0, 1, 2, ..., 9 sont respectivement 48,49,50,...,57.

2. Ecrire en Caml une fonction « Ajout_uplet (a,b) x » où (a,b) est un couple d'entiers et x est une liste de couples d'entiers, qui retourne une liste de quadruplets dont les deux premiers éléments sont a et b et les deux suivants sont pris dans x.

Exemple : Ajout_uplet (2,3) [(1,2);(4,8);(2,7)]=[2,3,1,2 ; 2,3,4,8 ; 2,3,2,7]