

**Examen durée 1h30Min**

Module PRF

MI Sections 1..10

**Exercice 1**

1) Montrez que la fonction suivante est primitive récursive, et donnez-en une dérivation

primitive récursive :  $f = \lambda xy. \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ x * (x + 1) * (x + 2) * \dots * y & \text{sinon} \end{cases}$ 

On considère les fonctions vues en cours comme primitives récursives.

2) Rappelons qu'un ensemble E est primitif récursif si et seulement si sa fonction

caractéristique  $Car_E = \lambda u. \begin{cases} 1 & \text{si } u \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est primitive récursive.Montrer que l'ensemble suivant est primitif récursif :  $E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x > y\}$ .**Exercice 2**

A- Soit la machine de Turing MT donnée par les instructions :

1/q <sub>0</sub> 0 q <sub>1</sub> ,	13/ q <sub>0</sub> 0 * q <sub>8</sub> ,	24/ q <sub>13</sub> 0 G q <sub>14</sub> ,	1) Quel est le traitement
2/ q <sub>1</sub> 0 D q <sub>2</sub> ,	14/ q <sub>8</sub> * D q <sub>9</sub> ,	25/ q <sub>14</sub> # 1 q <sub>15</sub> ,	réalisé par les instructions de 1/
3/q <sub>2</sub> 1 0 q <sub>3</sub> ,	15/ q <sub>9</sub> 1 # q <sub>10</sub> ,	26/ q <sub>15</sub> 1 G q <sub>14</sub> ,	à 12/ ? Dérouler pour x=3.
4/q <sub>3</sub> 0 D q <sub>4</sub> ,	16/ q <sub>10</sub> # G q <sub>10</sub> ,	27/ q <sub>14</sub> * G q <sub>14</sub>	2) Quel est le traitement
5/q <sub>4</sub> 1 D q <sub>4</sub> ,	17/ q <sub>10</sub> * G q <sub>11</sub> ,	28/ q <sub>14</sub> 1 G q <sub>14</sub> ,	réalisé par les instructions de
6/ q <sub>4</sub> 0 D q <sub>5</sub> ,	18/ q <sub>11</sub> 1 G q <sub>11</sub> ,	29/ q <sub>14</sub> 0 D q <sub>f</sub>	13/ à 23/ ? Dérouler pour 3
7/ q <sub>5</sub> 1 D q <sub>5</sub> ,	19/ q <sub>11</sub> 0 1 q <sub>12</sub> ,	30/ q <sub>2</sub> 0 1 q <sub>6</sub>	barres en supposant que la tête
8/ q <sub>5</sub> 0 1 q <sub>6</sub> ,	20/ q <sub>12</sub> 1 D q <sub>12</sub> ,		de Lecture/Ecriture se pointe
9/ q <sub>6</sub> 1 G q <sub>6</sub> ,	21/ q <sub>12</sub> * D q <sub>13</sub> ,		sur le premier <b>blanc</b> à <b>gauche</b>
10/ q <sub>6</sub> 0 G q <sub>7</sub> ,	22/ q <sub>13</sub> # D q <sub>13</sub> ,		de la barre la plus à gauche.
11/ q <sub>7</sub> 1 G q <sub>7</sub> ,	23/ q <sub>13</sub> 1 # q <sub>10</sub> ,		3) Dans quel cas
12/ q <sub>7</sub> 0 D q <sub>0</sub> ,			l'instruction 30/ est exécutée ?

4) En déduire la fonction d'arité 1 calculée par cette machine.

B- Donner les instructions de la MT qui calcule la fonction binaire **Inv** définie comme suit :

$$\text{Inv} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

**Exercice 3**

A-

1) Ecrire en Caml une fonction **Etendlistes** qui prend en entrée un élément x, et une liste de listes l et qui rajoute x en tête de chacune des listes de l.

**Exemple d'utilisation :** # Etendlistes 3 [[1;2];[4];[5;6]];  
 -: int list list = [[3; 1; 2]; [3; 4]; [3; 5; 6]]

2) Ecrire en Caml une fonction **Rallongelistes** qui prend en entrée une liste a et une liste de listes b, et qui construit la liste de toutes les listes obtenues en ajoutant un élément de a en tête d'une liste d'éléments de b.

**Exemple d'utilisation :** # Rallongelistes [1;2] [[3];[4;5]];  
 -: int list list = [[1; 3]; [1; 4; 5]; [2; 3]; [2; 4; 5]]

B-

1) Quel est le type inféré par CAML des deux fonctions suivantes ?

# let lg x = string\_length x;;

# let supp ch x y = if x+y&lt;lg ch then ""

else (sub\_string ch 0 y) ^ (sub\_string ch (x+y) ((lg ch) - (x+y)));;

2) Calculer: supp "ABCDEFGH" 2 4.

3) En déduire que fait cette fonction.

C- Corrigez éventuellement l'instruction suivante et évaluez là :

# true=(5=5) &amp; true or 6&lt;2;;