Département d'Informatique
1ère MI –USTHB-

mai 2013

Examen de PRF

Exercice 1 : (1.5; 2; 0.5; 4)

1. Soient les fonctions suivantes:

```
# let lg x= string_length x;;
# let souschaine1 x y = sub_string x 0 (lg y);;
# let souschaine2 x = sub_string x 1 (lg x-1);;
# let rec f x y = if lg x > lg y then 0 else if x = souschaine1 y x
                  then 1+ f x (souschaine2 y ) else f x (souschaine2 y);;
```

1.1. Donner le type inféré par la fonction f.

1.2. Calculer f "12" "112012";;

1.3. Que fait la fonction f ?

Ecrire la fonction fusion qui accepte comme paramètres deux (2) listes triées L1 et L2. Elle retourne une liste L triée par fusion de L1 et L2.

Exemple : **fusion** [1; 3; 7] [3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8] = [1 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8]

Exercice 2 : (1; 3; 2)

1. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ est pair}\}$ est primitif récursif.
2. Montrer que la fonction $f_i : x \rightarrow f_i(x) = x^i$ est primitive récursive, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
3. Déduire que la fonction suivante est primitive récursive :

$$g(x) = \lambda xy. \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ est pair} \\ x^3 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut utiliser la fonction primitive récursive « reste de la division de y par x », qu'on note r(x,y).

Exercice 3 : (3; 3)

1. Soit la fonction, $f : \mathbb{N}^* x \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, que calcule la Machine de Turing M=<S,E,I> définie par:

   $S = \{0, 1, *\}$ $\quad$ $E = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_f\}$

   $I = \{$ 1 : q_0 1 D q_0 ; 2 : q_0 * 1 q_1 ; 3 : q_1 1 G q_1 ; 4 : q_1 0 D q_2 ; 5 : q_2 1 0 q_3 ; 6 : q_3 0 D q_4 ; 7 : q_4 1 0 q_5 ; 8 : q_5 0 D q_6 ; 9 : q_6 1 0 q_7 ; 10 : q_7 0 D q_f $\}$

   A/ Calculer f(1,20) et f(4,3).

   B/ Déduire la définition de la fonction f.

2. Donner les instructions de la machine de Turing correspondant à la fonction $F : \mathbb{N}^* x \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} x \mathbb{N}$ qui associe au couple (x,y) le résultat de (x-1, sg(y)).

Exo 3

1. A/ $f(1,20) \doteq$

$$q_0 1^2 * 1^{21} \xrightarrow{2\times(1)} 1^2 q_0 * 1^{21} \xrightarrow{(2)} 1^2 q_1 1^{22} \xrightarrow{3\times(3)} q_1 0 1^{24}$$

$$\xrightarrow{(4)} q_2 1^{24} \xrightarrow{(5)} q_3 0 1^{23} \xrightarrow{(6)} q_4 1^{23} \xrightarrow{(7)} q_5 0 1^{22}$$

1 $$\xrightarrow{(8)} q_6 1^{22} \xrightarrow{(9)} q_7 0 1^{21} \longrightarrow q_f 1^{21}$$

$$(1,20) \xrightarrow[\text{de la MT}]{\text{Instruction}} \underline{20}$$

$$(1,20) \longrightarrow 1+20-1$$

$f(4,3) \doteq$

$$q_0 1^5 * 1^4 \xrightarrow{5\times(1)} 1^5 q_0 * 1^4 \xrightarrow{(2)} 1^5 q_1 1^5 \xrightarrow{6\times(3)} q_1 0 1^{1}$$

$$\xrightarrow{(4)} q_2 1^{10} \xrightarrow{5} q_3 0 1^9 \xrightarrow{(6)} q_4 1^9 \xrightarrow{(7)} q_5 0 1^8$$

1 $$\xrightarrow{(8)} q_6 1^8 \xrightarrow{(9)} q_7 0 1^7 \xrightarrow{(10)} q_f 1^7$$

$$(4,3) \xrightarrow[\text{de la MT}]{\text{Instruction}} \underline{6}$$

$$(4,3) \longrightarrow 6 = 4+3-\underline{1}$$

Conclusion : $f = \lambda xy.(x+y-1)$