Janvier 2015
Durée : 1h45.

Université des Sciences et de la technologie USTO.
Faculté des Mathématiques-Informatique.
1ére Année LMD-MI.
Module : Analyse1.

Examen final.

Exercice1: (4pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse par une preuve si la proposition est vraie ou par un contre-exemple si la proposition est fausse.

Toute réponse non justifiée sera notée par un zéro même si elle est juste.

Soient A une partie de R, $(U_n)_{n\in N}$ une suite réelle et f une fonction définie de R dans R :

a) Si A est bornée alors elle admet une borne supérieure.
b) Si A est minorée alors $minA$ existe.
c) Si $(U_n)_{n\in N}$ est bornée alors elle est convergente.
d) Si $(U_n)_{n\in N}$ est de Cauchy alors elle est bornée.
e) Si f est une fonction continue en un point $x_0 \in R$ alors f est dérivable en x_0.
f) Si f est 2-fois dérivable sur un intervalle $I \subset R$ alors sa première dérivée f' est continue sur I.

Exercice2: (5,5pts)

On considère la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{11}{4} \\ U_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{U_n - \frac{7}{4}} \end{cases}$$

1- Montrer que : $\frac{5}{2} < U_n < 4$, $\forall n \in N$.
2- Etudier la monotonie de $(U_n)_{n\in N}$.
3- En déduire qu'elle converge puis calculer sa limite.

Exercice3: (7,5pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x dans D_f.
3. Soit la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

   Déduire que $g(x)$ et $f'(x)$ (la dérivée de f) ont le même signe.
4. Etudier les variations de g puis déduire son signe.
5. Peut-on déduire que f est croissante sur D_f ?
6. Etudier les variations de f sur D_f.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice4: (3pts)

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall x \geq 0$:

$$Argshx + \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} < Argsh(x+1) < Argshx + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$