USTO MB-Faculté des Mathématiques et Informatique
-Département de Mathématiques

Examen final du module Algèbre 1 : Durée :**1H30 mn**

Exercice :1

Soient E un ensemble non vide et $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E .

1. Donner la définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble E.
2. Soit n $\in \mathbb{N}^*$; on définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\Re$ par :
   $\forall x, y \in \mathbb{Z}$: x $\Re$ y $\iff x - y$ est un multiple de n .
   a- Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   b- Montrer que l'ensemble quotient :
   $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ où $\overline{a}$ désigne la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$
   c- Pour n = 5 montrer que : $\overline{9033} = \overline{3}$ et que $\overline{2015} \cap \overline{2014} = \varnothing$.

Exercice :2

Parmi les propositions suivantes ,déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses tout en justifiant votre réponse .

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$.
2. $\exists . x \in \mathbb{N}$, $2 < x < 4$.
3. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ / n=2p.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}$ / n(n+1)=2p .

Exercice :3

Soient a, b des nombres réels tels que : $a \geq 0$ et $b \geq 0$; en utilisant le raisonnement par l'absurde montrer que :

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b$$

Exercice :4

Soit f l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par f(x) = $x^2 + 2x + 3$

1. f est -elle injective ?surjective ? bijective ?
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
3. Montrer que la restriction g :$]-\infty, -1]$ $\rightarrow$ $]2, +\infty]$ avec g(x) = f(x) est une bijection.
4. Déterminer l'application réciproque g^{-1} de g .