Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Semester 1 (2019 - 2020)

Socle commun MI
Durée : 1 heure 30 min

Examen finale (Analyse I)

Exercice 01 :Soient a, b deux nombres réels tels que $0 < a < b$, et soit les suites $(u_n), (v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall x, y > 0 : \sqrt{x.y} \leq \dfrac{x+y}{2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq v_n$.
3. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que : (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes.
5. Supposons que : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell_2$.
   i) Montrer que $\ell_1 = \ell_2$,
   ii) Que peut - on conclure ?

Exercice 02 :

I) Soit la fonction f, définit sur $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} & : \quad x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ \dfrac{1}{2} & : \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $[-1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est dérivable au point 0, et calculer $f'(0)$.

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

1. Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque g^{-1}.
2. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.
3. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

Exercice 03 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que : $A = \left\{ \dfrac{2n}{3n+1} . n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{2n}{3n+1} = a + \dfrac{b}{3n+1}$.
2. Montrer que A est bornée.
3. Trouver : $\sup(A), \inf(A), \max(A), \min(A)$.

ألنص العربي في الصفحة الموالية

جامعة محمد بوضياف المسيلة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي — القاعدة المشتركة للرياضيات والإعلام الآلي

السداسي الأول 2019 – 2020 — مدة الامتحان: ساعة ونصف

الامتحان الأول في مقياس التحليل 01

التمرين الأول: ليكن a, b عددين حقيقيين حيث $0 < a < b$ ولتكن $(u_n), (v_n)$ المتتاليتين المعرفتين بـ:

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n . v_n}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل $x, y > 0$ فإن: $\sqrt{x.y} \leq \dfrac{x+y}{2}$.
2. بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq v_n$.
3. ادرس رتابة المتتاليتين (u_n) و (v_n).
4. بين أن (u_n) و (v_n) هما متتاليتان متقاربتان.
5. نفرض أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$.

أ) بين أن $\ell_1 = \ell_2$،

ب) ما الذي يمكن استنتاجه؟

التمرين الثاني:

أ) لتكن الدالة f المعرفة على $[-1, +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & : x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ \dfrac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

1. ادرس استمرارية الدالة f على $[-1, +\infty[$.
2. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة 0 واحسب $f'(0)$.

ب) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

1. بين أن $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تتمتع بدالة عكسية g^{-1}.
2. أعط عبارة $g^{-1}(x)$.
3. احسب $(g^{-1})'(x)$.

التمرين الثالث: ليكن A الجزء من $\mathbb{R}$ المعرف بـ: $A = \left\{ \dfrac{2n}{3n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. جد العددين الحقيقيين a, b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{2n}{3n+1} = a + \dfrac{b}{3n+1}$.
2. بين أن A محدودة.
3. جد: $\sup(A), \inf(A), \max(A), \min(A)$.

Corrigé type (Analyse 1).

EXERCICE : 01 (7 pts).

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_n} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) On montre que : $\forall x, y > 0 : \sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$.

on a : $\forall x, y > 0 : (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

1

2) On montre que : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_n \leq v_n$

par récurrence.

pour $n = 0$: $\quad 0 < u_0 = a \leq b = v_0$ est vrai.

supposons que : $\quad 0 < u_n < v_n$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{u_n \cdot v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{(voir 1)}.$$

$$\Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < v_{n+1}$$

1,5

Alors : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_n < v_n$.

3) Etude la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n$

$$= \frac{u_n(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n \cdot v_n} + u_n} \geq 0.$$

Alors, (u_n) est une suite croissante.

et : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n$

$$= \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

1

Alors : (v_n) est décroissante.

4) on montre que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

on a : (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

alors : $0 < u_0 = a \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0 = b$

Donc : * La suite (u_n) est croissante et majorée par b

alors elle est convergente.

2

et * la suite (v_n) est décroissante et minorée par a

alors elle est convergente.

5) . i) on montre que $l_1 = l_2$.

comme (u_n) est convergente vers l_1.

alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l_1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n \cdot v_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l_1$

$\Rightarrow \sqrt{l_1 \cdot l_2} = l_1$

$\Rightarrow l_1 \cdot l_2 = l_1^2$

$\Rightarrow \boxed{l_1 = l_2}$ 1

ii) conclusion : 0,5

(u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

EXERCICE N°2: 8pts.

I). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Etude la continuité de f sur $[-1,+\infty[$.

on a : $x \to \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ est continue sur leur domaine de définition $[-1,0[\cup]0,+\infty[$, alors : il suffit de Montrer que f est continue en "0". 1

$$* \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2} = f(0).$$

Alors f est continue en "0" 1

ou f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2) On montre que f est dérivable en "0".

on a : $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x} \quad (\text{Hopital})$$

1,5

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}}{2} \quad (\text{Hopital}).$$

$$= -\frac{1}{8}.$$

Alors f est dérivable en "0" et $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{8}}$

0,5

II) La suite (EX 2) :

$$g(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}.$$

1) on montre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque g^{-1}

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{x}} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Alors : g est continue

et strictement monotone, donc g admet une fonction réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. 1,5

2) L'expréssion de g^{-1}

on pose : $y = g^{-1}(x) \Rightarrow g(y) = x$

$$\Rightarrow \frac{e^{2y}-1}{2e^{y}} = x$$

$$\Rightarrow e^{2y} - 2e^{y}x - 1 = 0$$

$$\Delta' = x^2 + 1 > 0 :$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{y} = x + \sqrt{1+x} > 0 \\ \text{ou } e^{y} = x - \sqrt{1+x} < 0 \text{ réfuse.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \ln\left(x + \sqrt{1+x}\right) = g^{-1}(x)}.$$ 1,5

3) : La dérivée de g^{-1}

on a $g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$ 1

EXERCICE N°3 . (5 Pts)

$A = \left\{ \frac{2n}{3n+1} , n \in \mathbb{N} \right\}$.

1). on a : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}$

$$\Rightarrow \frac{2n}{3n+1} = \frac{3an+a+b}{3n+1}$$

par identification :

$\begin{cases} 3a = 2 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)} , n \in \mathbb{N} \right\}$. (1)

2). on montre que A est bornée

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3n+1} \leq 1$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)} < \frac{2}{3}}$$ (1)

Alors, A est bornée.

3) on a : $0 \in A$ car : $\exists n = 0 : \frac{2n}{3n+1} = \frac{2\times 0}{3\times 0+1} = 0 \in A$:

et "0" est un minorant de A :

Alors, $\inf(A) = 0 = \min(A)$. (1,5)

• : $\sup(A) = \frac{2}{3}$ car : $\forall \varepsilon > 0 : \exists \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+1)} \in A$: tel que.

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2}{3} - \frac{2}{3(3n+2)} \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow n > \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} > -\frac{1}{3}.$$ (1)

Il suffit de choisir $\boxed{n_0 = \left[\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} \right] + 1} \in \mathbb{N}$.

où : $\sup(A) = \frac{2}{3}$.

comme $\frac{2}{3} \notin A$: $\max(A)$ n'existe pas (0,5)