Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Socle Commun MI
Année Universitaire 2019-2020

Matière : **Algèbre 01**
Durée : **1h : 30m**

(Examen final)

Exercice n°1 : (3pts)
Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E.

1. Montrer que $A \setminus B = C_A(A \cap B)$.
2. Déduire que si $A \setminus B = A \setminus C$ alors $A \cap B = A \cap C$.

Exercice n°2 : (6.5pts)
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, comme suit

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 3k$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$.
3. Déduire les classes d'équivalence $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$.
4. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
5. A quelle classe d'équivalence appartient le nombre 2020.

Exercice n°2 : (6.5pts)
Soit $G = \mathbb{R}$. On definit sur G une loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall x, y \in G : x * y = x + y + \frac{1}{6}$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit $H = \{x = \frac{2n-1}{6}; n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous groupe de $(G, *)$.
3. Soit $\begin{array}{rccc} f: & (G,*) & \longrightarrow & (\mathbb{R},+) \\ & x & \mapsto & f(x) = 3x + \frac{1}{2} \end{array}$
   (a) Montrer que f est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
   (b) Déterminer $ker(f)$. Que vous conclus ?

Exercice n°4 : (4pts) **Question de cours**
Soit $f : (G, *) \to (G', \perp)$ un homomorphisme de groupes.
Montrer que l'image d'un sous-groupe H de G par f est un sous-groupe de G'.

Bon courage

2019/2020

Corrigé type de l'examen d'algèbre 01

EXO1

1/ $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A \cap B\} = C_A(A \cap B)$. (1,5)

2/ $A \setminus B = A \setminus C \Rightarrow C_A(A \cap B) = C_A(A \cap C) \Rightarrow C_A[C_A(A \cap B)] = C_A[C_A(A \cap C)]$

$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$. (1,5)

EXO 2.

$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x R y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = 3k.$

1/ $x R x \Leftrightarrow \exists k = 0 \in \mathbb{Z} / x - x = 3k$. Donc, R est reflexive. (0,5)

$x R y \Leftrightarrow x - y = 3k \Rightarrow y - x = (-k)n = k'n$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$.

Donc, $y R x$. D'où, R est symétrique. (1)

$\begin{cases} x R y \\ \wedge \\ y R z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3k \mid k \in \mathbb{Z}. \\ \wedge \\ y - z = 3k' \mid k' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ (1) La sommation membre à membre donne, $x - z = (k + k')n = k''n$ avec $k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$.

Donc, $x R z$. D'où, R est transitive. Alors, R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2/ Pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $\overline{a} = \{y \in \mathbb{Z} : y R x\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + 3k\}$ (1)

$= \{x + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3/ En particulier : $\overline{0} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$.

$\overline{1} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 1\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 1$. (1,5)

$\overline{2} = \{y \in \mathbb{Z} : y R 2\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z} + 2$.

4/ On sait que : $\mathbb{Z}/_R = \{\overline{x} : x \in \mathbb{Z}\}$ (1)

$= \{\overline{x} : x = 3m\} \cup \{\overline{x} : x = 3m + 1\} \cup \{\overline{x} : x = 3m + 2\}$

$= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

5/ $2020 = 3 \times 673 + 1$. Donc, $2020 \in \overline{1}$. (0,5)

EX03 :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x * y = x + y + 1/6$$

1/ $\forall\, x * y = x + y + \frac{1}{6} = y + x + \frac{1}{6}$. Donc, $*$ est commutative. 0,5

2/ $x * (y * z) = x + (y * z) + \frac{1}{6} = x + (y + z + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6} = (x + y + \frac{1}{6}) + z + \frac{1}{6}$ 0,5

$= (x + y + \frac{1}{6}) * z = (x * y) * z$. Donc, $*$ est associative.

3/ $x * e = x \Rightarrow x + e + \frac{1}{6} = x \Rightarrow e = -\frac{1}{6}$. Donc, l'élément neutre est $e = -\frac{1}{6}$ 0,5

4/ $x * \bar{x} = e \Rightarrow x + \bar{x} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \bar{x} = -x - \frac{1}{3}$. Donc, l'élément symétrique de x est $\bar{x} = -x - \frac{1}{3}$. 0,5

Alors, $(G, *)$ est un groupe commutatif.

2/ ① $H \neq \phi$, car pour $n=0$ on a : $-\frac{1}{6} \in H$. 0,5

② $\forall x, y \in H$, $x * y \in H$.

$x \in H \Leftrightarrow x = \frac{2n-1}{6}$; $y \in H \Leftrightarrow y = \frac{2\bar{n}-1}{6}$. 1

$x * y = \frac{2n-1}{6} + \frac{2\bar{n}-1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2n-1+2\bar{n}-1+1}{6} = \frac{2(n+\bar{n})-1}{6} = \frac{2\tilde{n}-1}{6} \in H$.

③ $x \in H$: $\bar{x} \in H$.

$\bar{x} = -x - \frac{1}{3} = -\left(\frac{2n-1}{6}\right) - \frac{1}{3} = \frac{-2n-1}{6} = \frac{2(-n)-1}{6} = \frac{2\bar{n}-1}{6} \in H$. 0,5

Donc, H est un sous-groupe de $(G, *)$.

3) a/ $f(x * y) = 3(x * y) + \frac{1}{2} = 3\left(x + y + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} = 3x + 3y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= (3x + \frac{1}{2}) + (3y + \frac{1}{2}) = f(x) + f(y)$. Donc, f est un homomorphisme. 1

b/ $\ker(f) = \{x \in G : f(x) = 0\}$

$= \{x \in G : 3x + \frac{1}{2} = 0\} = \{-\frac{1}{6}\}$. 1

$\Rightarrow f$ est injective 0,5

EXO4

$f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ est un homomorphisme de groupe.

1/ Comme f est un homomorphisme de groupes, alors $f(e_G)=e_{G'}$ et $e_G \in H$.
Donc, $e_{G'} \in f(H)$. D'où, $f(H) \neq \phi$. 1

2/ Pour tout $y_1, y_2 \in f(H)$. On démontre que $y_1 \perp y_2 \in f(H)$.

$y_1 \in f(H) \Leftrightarrow \exists x_1 \in H \,/\, f(x_1)=y_1$ 0,5 , $y_2 \in f(H) \Leftrightarrow \exists x_2 \in H \,/\, f(x_2)=y_2$

On a $y_1 \perp y_2 = f(x_1) \perp f(x_2) = f(x_1 * x_2)$. Car f est un homomorphisme 1
et comme H est un sous-groupe de G, alors $x_1 * x_2 \in H$.
Donc, $y_1 \perp y_2 \in f(H)$.

3/ Pour tout $y \in f(H)$. On démontre que $y' \in f(H)$.

On a $y \in f(H) \Leftrightarrow \exists x \in H \,/\, f(x)=y$. 0,5

Alors, $y' = (f(x))' = f(x')$, car f est un homomorphisme de groupes
et comme H est un sous-groupe de G, alors $x' \in H$ 1
Donc, $y' \in f(H)$. D'où, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.