Université de Sétif 1
Faculté des sciences
Département MI

23 Janvier 2022
8h:30 -10h.

Examen d'Analyse 1

Les Calculatrices et les Téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (**03 pts**)

On considère l'ensemble $A = \left\{x + \frac{1}{x} \ : \ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

1) Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$.
2) Montrer que A admet une borne inférieure, et déterminer $\inf A$.
3) Montrer que A n'est pas majorée.

Exercice 2 : (**08.5 pts**)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ ; \ n \geq 1 \end{cases}$.

1/ Montrer que $u_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2/ Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
3/ Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$,
et déterminer sa limite dans le cas où elle est convergente.
4/ Montrer que $u_n = 2\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
(Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$: $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$).
5/ En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 3 : (**08.5 pts**)

On donne la fonction suivante : $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{x} & : \ x \geq 0 \\ 1 + \ln(1 + x^2) & : \ x < 0 \end{cases}$.

1) Déterminer son domaine de définition D_f.
2) Montrer que f est continue sur D_f.
3) Montrer que f est dérivable sur D_f, et f' est continue.
La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4) Peut-On appliquer à f le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[-1, 1]$?
Si oui, trouver tous les réels c tels que $f(1) - f(-1) = 2f'(c)$.
(**On rappelle que** : $e \simeq 2.72$ et $\ln 2 \simeq 0.69$.)

Bon courage