جامعة محمد الصديق بن يحي جيجل
كلية العلوم الدقيقة و الإعلام الآلـــي
قسم التعليم الأساسي للرياضيات و الإعلام الآلي
السـنة الأولـى

يوم 2019/07/13
الوقت : ساعتين

امتحـان الجبر الخطي

التمـرين الأول: (3.5 نقطة)

لتكن المصفوفتان $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1- أحسب A^2. برهن أن $A^2 = aA + bI_3$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ يطلب تعيينهم.
2- استنتج أن A قابلة للقلب و عين A^{-1}

التمـرين الثاني: (11 نقطة)

ليكن التطبيق الخطي الداخلي المعرف على $\mathbb{R}^3$ بـ $A = M_f(B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

حيث $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$

a) عين رتبة المصفوفة A و استنتج $\dim Ker\, f$.
b) عين أساس لـ $Ker f$ و أساس لـ $Im f$.
c) برهن أن $B' = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,-1,0)\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$
d) عين مصفوفة العبور P من B الى B' ثم أحسب P^{-1} .
e) احسب المصفوفة $A' = M_f(B')$ المرفقة لـ f في الأساس B' .
f) اعط العلاقة التي تربط بين P, A, A' و P^{-1} .
g) احسب $(A')^{100}$ و استنتج المصفوفة A^{100} .

التمـرين الثالث: (5.5 نقطة)

من اجل $m \in \mathbb{R}$ نعتبر جملة المعادلات الخطية المعرفة بـ

$$(S) \begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ 2x - y + (4m + 3)z = 0 \\ -x + 2y + 2m^2 z = 0 \end{cases}.$$

1- اكتب الجملة (S) على الشكل المصفوفي $A \times X = B$ حيث $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
2- عين قيم m التي من اجلها تكون الجملة (S) تقبل حل وحيد.
3- من اجل $m = 1$ استخدم كرامر في ايجاد الحل الوحيد للجملة.

بالتوفيق