Université Ziane Achour de Djelfa

1^{re} Année LMD (MI) — 17/01/2019

Module: Analyse I — Durée 1h30

Examen du 1^{re} semestre

Exercice 01 :

1) Pour tout x, $y \in \mathbb{R}$. Démonter les relation suivants:
   - $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
   - $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes:
   - $\sqrt{x^2 + x^3} = 0$
   - $\sqrt{(x-2)^2} = (-x+2)$

Exercice 02 :

1) En appliquant la définition de la limite d'une suit, démontrer que chacune des suite (U_n) suivantes converge vers la limite L indique:
   - $U_n = \frac{2}{n}$, $L = 0$
   - $U_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $L = 0$

2) calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ Si:
   - $U_n = \frac{n(\cos^2(n) + 2\sin^2(n))}{(n+1)^2}$
   - $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

Exercice 03 :

Soit $a > 0$ et la suit récurrente définie par

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a^2}{U_n}\right) \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} \geqslant a$.
2) Etudier la montonic de la suit (U_n).
3) En déduire la nature de la suit. et calculer la $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 04 :

Calculer les limites suivant:
- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 2x - 4}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$