Exercice 1 *1. Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que :*

(a) A est borné $\Longrightarrow$ B est borné

(b) $\sup(A) \geq \sup(B)$.

2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soient α et β deux nombres réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que :

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$$

Exercice 2 *Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1 + 2u_n}{2 + u_n}. \end{cases}$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \succ 1$.*
2. *Étudier la monotonie de la suite (u_n).*
3. *La suite (u_n) est elle convergente. Si oui donner sa limite.*
4. *Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Determiner $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.*

Exercice 3 *Calculer les limites suivantes*

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{x-5}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x).$$

Exercice 4 *Soit f une fonction réelle définie par*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} + x, & si\ x > 0 \\ 0, & si\ x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x, & si\ x < 0. \end{cases}$$

1. *En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.*
2. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
4. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x > x + 1.$$