80

USTHB
Faculté de Mathématiques

Module d'Analyse I,1ère année MI
Section 8, 14 janvier 2013

EPREUVE FINALE DU 1er SEMESTRE (Durée: 1h 30 mn).

Exercice 1 [3 points]: On considère l'ensemble $A = \{x_n = \frac{1}{n^2+n+1}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que A est non vide et borné.
2. Déterminer $SupA, InfA, maxA$ ainsi que $minA$ s'ils existent, en justifiant les réponses.

Exercice 2 [6 points]: Soient a, b et c des nombres réels et T la fonction définie par

$$T(x) = \begin{cases} e^{\arctan x} & \text{si } x \geq 0 \\ asin^2x + bsinx + c & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le développement limité de T, au voisinage de 0^+, à l'ordre 2.
2. Pour quelles valeurs de a, b et c, T est-elle continue en 0?
3. Pour quelles valeurs de a, b et c, T est-elle dérivable en 0?
4. Calculer alors $T'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et étudier sa continuité en 0.
5. Etudier la dérivabilité de T' au point 0.

Problème [11 points]: On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} e^{\frac{-1}{1+x}}$$

Partie I:

1. Calculer $f'(x)$, présenter le résultat sous la forme de produit de facteurs.
2. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variations.
3. Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \dfrac{e^{-1}}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$
4. Ecrire le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

5. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$, ainsi que la position relative de la courbe et de la tangente.

6. On pose $g(x) = f(x) - x$, étudier les variations de g sur $[0, 1]$.

7. Montrer qu'i existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$, tel $g(\alpha) = 0$.

Partie II:

on considère la suite numérique (U_n) définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{e} \\ \\ U_{n+1} = f(U_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. On pose $u(x) = 3e^{\frac{-1}{x+1}}$ et on admet que $u(x) > x + 1$, $\forall x \in [0, \frac{1}{e}]$, montrer que $\dfrac{1}{3} < U_n \leq \dfrac{1}{e}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que les deux sous-suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent. On note l et l' leurs limites respectives.

3. A quelle condition la suite (U_n) est-elle convergente? Dans ce cas, donner un meilleur encadrement du réel α de la question 7.

USTHB
Faculté de Mathématiques

Module d'Analyse I, 1ère année MI
Section 8, 20 janvier 2013

CORRIGÉ DE L'EPREUVE FINALE DU 1er SEMESTRE.

Exercice 1 [3 points]: $A = \{x_n = \frac{1}{n^2+n+1}; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrons que A est non vide: pour $n = 0$, $x_0 = 1 \in A$, donc $A \neq \emptyset$.
0,5 Montrons que A est borné: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n^2+n+1} \leq 1$, 0 est un minorant et 1 est un majorant de A donc A est un ensemble borné.

2. Le nombre 1 est un majorant de A et $1 \in A$ alors $maxA = 1$.
1 $maxA = 1 \Rightarrow supA = 1$.
En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, montrons que $InfA = 0$:
Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il s'agit de trouver un entier naturel n (n pouvant dépendre de ε) tel que $\frac{1}{n^2+n+1} < \varepsilon$.
1 Or $(\frac{1}{n^2+n+1} < \varepsilon) \Leftrightarrow (n^2+n+1 > \frac{1}{\varepsilon})$ et il suffit de prendre un entier $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui est toujours possible, par exemple $n = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. En effet, on a alors $(n > \frac{1}{\varepsilon}) \Rightarrow (n^2+n+1 > n > \frac{1}{\varepsilon})$.

0,5 $0 = infA$ mais 0 n'appartient pas à A donc $minA$ n'existe pas.
Une autre méthode: considérer la suite $(x_n)_n$, montrer qu'elle est décroissante et convergente vers 0 et conclure.

Exercice 2 [6 points]:

1. Le développement limité de T, au voisinage de 0^+, à l'ordre 2 est

$$T(x) = e^{\arctan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

0,5

2. La fonction T est continue au point 0 si et seulement si

$$\lim_{x\to 0^+} T(x) = \lim_{x \to 0} T(x) = T(0).$$

- $T(0) = 1$ car $\arctan 0 = 0$ et $e^0 = 1$.
- $\lim_{x\to 0^+} T(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\arctan x} = 1$
- 1 $\lim_{x\to 0^-} T(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\sin^2 x + b\sin x + c) = c$

Donc T est continue au point 0 si et seulement si $c = 1$ et a, b peuvent être des réels quelconques.

3. On fixe $c = 1$ (car sinon T ne serait même pas continue!).
Ensuite, T est dérivable au point 0 si et seulement si les deux limites $\lim_{x \to 0^+} \frac{T(x) - T(0)}{x}$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{T(x) - T(0)}{x}$ existent et sont égales. Et alors, on pourra considérer que cette limite commune est la valeur de $T'(0)$.

1

- Pour calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{T(x) - T(0)}{x}$, on utilise le développement limité de la première question et on trouve $\lim_{x \to 0^+} \frac{T(x) - T(0)}{x} = 1$.
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{T(x) - T(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a\sin^2 x + b\sin x}{x} = b$

Donc T est dérivable au point 0 si et seulement si $c = 1, b = 1$ et a peut être un réel quelconque.

4. En dehors du point 0, T est dérivable car elle est composée, produit et somme de fonctions élémentaires dérivables. Fixons $b = 1$ et $c = 1$ et calculons $T'(x)$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant les régles de dérivation classiques. On trouve

1

$$T'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} & \text{si } x \geq 0 \\ 2a\cos x \sin x + \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

0,5 → continuité!

5. On fixe $b = c = 1$.
En utilisant les développements limités et la définition de la dérivabilité, on trouve que T' est dérivable en 0 ssi $a = \frac{1}{2}$

2

Problème [11 points]: On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} e^{\frac{-1}{1+x}}$$

Partie I:

1.

$$f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^3} e^{\frac{-1}{1+x}}$$

1

2. f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations.

4

0,5 3. On vérifier facilement que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \dfrac{e^{-1}}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}$, en utilisant $e^{a+b} = e^{a}.e^{b}$.

4. Le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2 est:

1,5
$$f(x) = \frac{1}{e}[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)]$$

5. L'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$ est $y = \frac{1}{e}$
1 et la courbe est en dessous de la tangente car $f(x) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{2e}x^2 + o(x^2)$ et $-\frac{1}{2e}x^2 < 0$.

6. La fonction g est dérivable car f est dérivable et on a
1 $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ sur $[0, +\infty[$ car $f'(x) \leq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

7. g est continue sur $[0, 1]$ car f l'est et $g(0)g(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires:
1 il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$, tel $g(\alpha) = 0$.
Comme de plus g est strictement décroissante sur $[0.1]$ alors α est l'unique réel sur $]0, 1[$ qui vérifie $g(\alpha) = 0$.

Partie II:

on considère la suite numérique (U_n)définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{e} \\ U_{n+1} = f(U_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2 1. Voir correction en cours.

2. Comme f est une fonction décroissante alors les deux sous-suites (U_{2n})
1 et (U_{2n+1}) sont monotones et comme la suite (U_n) est bornée alors chacune des sous-suites est bornée donc elles convergent. On note l et l' leurs limites respectives.

1 3. La suite (U_n) est convergente ssi $l = l'$. Dans ce cas, $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{e}$.