Faculté de mathématiques
Master ACC

Année: 2012 – 2013
Anneaux et modules II

EPREUVE FINALE

Exercice 1 Soient A un anneau commutatif unitaire et I, J deux idéaux de A.

1. Soit f l'application définie par
$$f : \frac{A}{I} \times \frac{A}{J} \longrightarrow \frac{A}{(I+J)}$$
$$(\bar{x}, \tilde{y}) \longmapsto \widehat{xy}$$
où $\bar{x}$ désigne la classe de x modulo I, $\tilde{y}$ désigne la classe de y modulo J et $\widehat{xy}$ désigne la classe de xy modulo $(I+J)$
   (a) Montrer que f est bien défnie.**(1 pt)**
   (b) Montrer que f est A-bilinéaire. **(2 pts)**
2. Montrer que $\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J}$ est un A-module engendré par $\bar{1} \otimes_A \tilde{1}$. **(1 pt)**
3. Soit $\alpha \in I + J$. Montrer que $\alpha\left(\bar{1} \otimes_A \tilde{1}\right) = 0$.**(1 pt)**
4. En déduire un isomorphisme de $\frac{A}{I} \otimes_A \frac{A}{J}$ vers $\frac{A}{(I+J)}$.**(3 pts)**
5. Application: Soient n et m deux entiers positifs, et $d = \mathrm{pgcd}(n, m)$. Montrer que $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}$.**(2 pts)**

Exercice 2 Soit A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $x \in A$.

1. Soit $I_x = \{a \in A \mid ax \in I\}$.
   (a) Montrer que I_x est un idéal de A **(1 pt)**
   (b) Montrer que $I \subset I_x$ **(0,5 pt)**
   (c) Montrer que $Ann\,(x) \subset I_x$ **(0,5 pt)**
2. Considérons la suite de A-modules suivantes
$$0 \longrightarrow \frac{I_x}{Ann\,(x)} \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} \frac{I + xA}{xA} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$
où pour tout $\bar{a} \in \frac{I_x}{Ann(x)}$, $u\,(\bar{a}) = xa$ et $v\,(i) = \bar{\imath}$ pour tout i dans I..
   (a) Montrer que l'application u est bien définie. **(1 pt)**
   (b) Rappeler la définition d'une suite exacte de A-modules.**(0,5 pt)**
   (c) Montrer que la suite (2) est exacte.**(3 pts)**
3. Rappeler la définition d'un anneau Noethérien, et donner sa négation. **(1 pt)**
4. Supposons que A n'est pas noethérien. Soit M l'ensemble des idéaux de A qui ne sont pas de type fini.
   (a) Montrer que M admet un élément maximal P. **(1 pt)**
   (b) Soit x, y deux éléments de A vérifiant $xy \in P$
      - Montrer que si $x \notin P$ alors $P + xA$ est de type fini.**(1 pt)**
      - Montrer que si $y \notin P$ alors P_x est de type fini.**(1 pt)**
   (c) En déduire de la question (2) que l'idéal P est premier.**(0,5 pt)**
5. En déduire que l'anneau A est noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini.