guide_pharmacie@yahoo.fr

Université de Batna

Faculté de Médecine

Département de Pharmacie

2005/2006

Cours de Mathématiques

1ère Année Pharmacie

Chapitre III : Fonction de plusieurs variables

D'après le cahier de :

I. Hadef

Created by: T. Djebaili

Chapitre III : Fonctions de plusieurs variables

1/ Définition

On appelle fonction de n variables réelles, une application, une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

D est le domaine de définition de f.

exp :

1/ $\begin{cases} f(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 \\ (a, b, c) \in \mathbb{R} \end{cases}$

f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

2/ $f(x, y) = \sqrt{\alpha^2 - (x^2 + y^2)}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

est une fonction de deux variables définie sur $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq \alpha^2 / \alpha \in \mathbb{R}_+^* \}$.

3/ La fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$.

représentation graphique :

Dans le cas d'une fonction de deux variables on choisit par exp, un trièdre orthonormé direct, un couple $(x, y) \in D$ est représenté par :

un point H de plan xoy
auquel on peut associer les $M(x, y, f(x,y)) = M(x, y, \beta)$

dcp :

$$f(x,y) = \sqrt{\alpha^2 - (x^2+y^2)} \quad \alpha > 0$$

Le domaine de définition, défini par $x^2 + y^2 \leq \alpha^2$.
est representer par l'ensemble de points de disque
circulaire de centre O de rayon α.

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - (x^2+y^2)} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \beta^2 = \alpha^2 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des point (x, y, β) forme une sphère
de centre O et de rayon α.

2/ Limite d'une fonction de deux variable en un point :

Definition : On dit que $f(x,y)$ tend vers
une limite l lorsque (x,y) tend vers (x_0, y_0)

$\lim f(x,y) = l$ si :
$(x,y) \to (x_0, y_0)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \{ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$.

L'unicité de la limite lorsqu'elle existe :

Proposition : $f, g = D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

1/ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

2/ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha f(x,y) = \alpha \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x,y)$

3/ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y)\, g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

exp :

1/ $f(x,y) = (x+y) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$

f n'est pas définie au point $(0,0)$ on étudier $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$|f(x,y)| = \left|(x+y) \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\right|$

$\leq |x+y| \cdot \left|\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leq |x+y| \times 1$

$\Rightarrow -|x+y| \leq f(x,y) \leq |x+y|$.

$0 \leq \lim f(x,y) \leq 0$.

2/ $f(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)}{y} \sin y$.

$\lim f(x,y) = \lim (1+x^2+y^2) \cdot \lim \dfrac{\sin y}{y}$

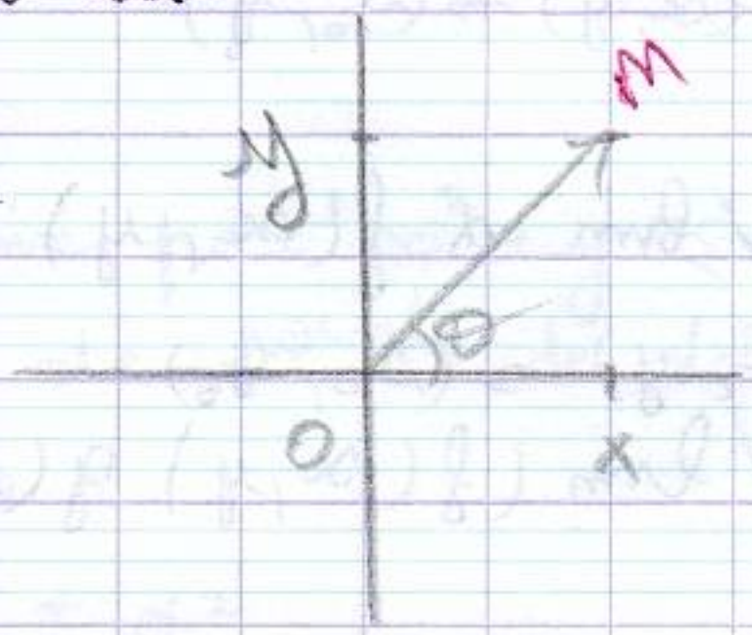
$(x,y)\to(0,0) \quad (x,y)\to(0,0) \quad (x,y)\to(0,0)$

$= 1 \cdot 1 = 1$

3/ $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ / $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

En utilisant la coordonnées polaires

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2} = r \quad r \geq 0$



$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r \in \mathbb{R}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$.

$(x,y) \to 0$

$r \to 0$

$\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{r}[\cos\theta + \sin\theta] = +\infty$

3/ Continuité d'une fonction de 2 variables en un point.

Definition : Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to f(x,y)$.

On dit que f est continue au point (x_0, y_0) $[(x_0, y_0) \in D]$ si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Théorème :

Si f et g sont deux fonctions continues au point $M_0 = (x_0, y_0)$, alors les fonctions $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) fg, f/g, $(g \circ f)$ sont continues au point $M_0 = (x_0, y_0)$

Remarque :

1/ Si $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = l$ et

$\lim_{x\to y} f(x,y) = l$

Le réciproque n'est pas vraie

2/ $\begin{cases} \bullet \lim_{x\to x_0} f(x,y) = l \\ \bullet \lim_{y\to y_0} f(x,y) = l \end{cases} \not\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

3/ $\lim_{x\to x_0} f(x,y) \neq$, ou bien :

$\lim_{x\to y_0} f(x,y) \neq \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq$

4/ si $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l_1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l_2 \end{cases}$ / $l_1 \neq l_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ ∄

esp:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = -1$, - $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = +1$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ ∄.

Definition Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$

on dit que f est continue.

4/ Les Dérivées partielles :

Definition : Soit la fonction de 2 variables

$f : (x,y) \to f(x,y)$

On appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) le nombre s'il existe.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$= f'_x(x_0, y_0)$$

de la même manière, on définie la dérivée partielle de f par rapport à y.

$$\lim_{K \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + K) - f(x_0, y_0)}{K} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= f'_y(x_0, y_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont appelées respectivement dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à x et à y.

Remarque :

On remarque que la dérivée partielle par rapport à x n'est autre que la dérivée au point x_0 de la fonction $\Phi(x) = f(x, y_0)$.

La différentielle total de f :

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielle 1ères continues par rapport à x et à y on appelle différentielle totale de f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

exp :

1/ $f(x,y) = 5x^2 - xy + 2y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x - y \; , \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 4y$$

2/ $f(x,y) = x^2 \sin y$ / $D = \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \sin y \, x \; , \; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 \cos y .$$

3/ $f(x,y) = 2x \ln y$.

$D = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \ln y \; , \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{y}$$

Dérivées partielles secondaire :

les fonctions des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

peuvent elles mêmes admettres des dérivées partielles on les rappelle dérivées partielles secondes de f /

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

on peut évidement envisager les dérivées d'ordre supérieures.

exp : $(K^\circ = 1)$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = 10$.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right] = -1$

$\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] = -1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = 4$$

2/ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \sin y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \cos y$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x \cos y$.

Theorème : Pour qu'une fonction f à deux variable soit differentiables en un point (x,y), il faut et il suffit ses derivées partielles de 1er ordre $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ existent et soient continues en (x,y)

Operations sur les fonctions differentiables.

Si f et g sont deux fonction differentiables en (x,y) alors $f+g$, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, fg, f/g.

sont aussi des fonctions differentiables en (x,y)
alors: $d(f+g) = df + dg$.

$d(\lambda f) = \lambda df$

$d(fg) = df\,g + f\,dg$.

$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df\,g - f\,dg}{g^2}$. $g(x,y) \neq (0,0)$

- $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$.
- $dg(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy$.
- $d(f+g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)dy$.

Theorème:

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

si f une fonction differentiables au point $(x,y) \Rightarrow$ f est continue au point (x,y).

Derivation d'une fonction composé:

Si $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}$ existent et sont continue. Si l'on remplace x et y par des fonctions d'une seule variable: $\begin{cases} x = I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \to x(t) \end{cases}$.

x et y sont continues et dérivables sur $\underline{I}$, on obtient une fonction composé de t :

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

La dérivée de F par rapport à t :

$$F'(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Fonction composés :

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(u, v) \to f(u, v)$$

soient les 2 fonctions :

$$u : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to u(x, y)$$

$$v : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to v(x, y)$$

$f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y)) = F(x, y)$

F est une fonction composés ces dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

exp: $f(x,y) = u \ln|v|$.

$\begin{cases} u(x,y) = x + 2y \\ v(x,y) = y - 2x \end{cases}$

$f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$.

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$= \ln|v| \cdot 1 + \frac{u}{v} \times (-2)$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \ln|v| - \frac{2u}{v}$

$= \ln|y-2x| - \frac{2(x+2y)}{y-2x}$.

- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

$= \ln|v| \cdot 2 + \frac{u}{v} \cdot 1$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2\ln|y-2x| + \frac{x+2y}{y-2x}$

Théorème de Schwartz :

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \to f(x,y)$.

si la dérivées particlles de second ordre mixtes existent et sont continues.

$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Extremes d'une Fonction à deux variables

Théorème Soit $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si f est admet un extremum en un point (x_0, y_0) et que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et à y en (x_0, y_0) alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 .$$

Définition

On appelle matrice Hessienne en un point (x_0, y_0) d'une fonction f à 2 variables la matrice.

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

Extremums (minimum ou maximum)

Soit $f : U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$(x, y) \to f(x, y)$.

f admettant des dérivées partielles d'ordre 2.

Notons Δ le determinant de la matrice hessienne est appelé le hessien :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2.$$

- Si : $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ est un minimum.

- Si $\Delta > 0$ et $r < 0$:

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ est un maximum.

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ cas indeterminé

exp :

$f(x, y) = x^2 + y^2 \;/\; D_f = \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.

(x_0, y_0) est un extremum $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_0 = 0 \\ 2y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$.

La nature d'extremum:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 & , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \end{cases}$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$\Delta > 0$ et $r = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un minimum

Calcul d'erreur:

1/ Erreur absolue:

Soit f une fonction de 2 variables f admet des derrivées partielles continues au point (x_0, y_0) avec x effecté d'une erreur Δx_0 et y effecté d'une erreur Δy_0. L'erreure Δf induite par l'imprécision sur x_0, y peut être estimé par : $|\Delta f| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \Delta x_0 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)\right| \Delta y_0$

exp: La concentration C d'un produit donnee du cours du temps suit la loi de variation.

$C = C_0 e^{Kt}$, $C_0 = C(0)$

$C_0 = (20 \pm 0,1)\ g/l$

$K = (0,2 \pm 0,01)\ min^{-1}$

$t = (5,2 \pm 0,1)\ min$

$c = f(c_0, K, t)$

$c = 20e^{(0,2)(5,2)} = 56,58\ g/l$.

Calculons l'erreur ΔC :

$$dc = \frac{\partial c}{\partial c_0} dc_0 + \frac{\partial c}{\partial K} dK + \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial c}{\partial c_0} = e^{Kt}, \quad \frac{\partial c}{\partial K} = tc_0 e^{Kt}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = Kc_0 e^{Kt}$$

$$dc = e^{Kt} dc_0 + tc_0 e^{Kt} dK + Kc_0 e^{Kt} dt.$$

donc : $|\Delta C| \leq [|e^{Kt}| \Delta c_0 + |tc_0| \Delta K + |c_0 K| \Delta t]$

$K > 0, t > 0, c > 0$.

$|\Delta 4 \leq e^{(0,2)(5,2)} [0,1 + (5,2) \cdot 20 (0,01) + 9^2 \cdot 20.0,1]$

$|\Delta C| \leq 4,36\ g/l \Rightarrow -4,36 \leq \Delta C \leq 4,36$

$56,58 - 4,36 \leq c + \Delta c \leq 56,58 + 4,36$

$c = (56,58 \pm 4,36)\ g/l$.

* **Definition :**

Soit $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f admet des dérivées partielles premières continues

On appelle gradient de f et on note $\overrightarrow{gra}\, df$ L'application

$\overrightarrow{gra}\, df = U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$(x,y) = \overrightarrow{grad} f(x,y)$.

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right].$$

Proposition : Soient $f, g, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
f et g admettent des dérivées particlles premières continues.

- $\overrightarrow{grad}(f(x,y) + g(x,y)) = \overrightarrow{grad}(f(x,y)) + \overrightarrow{grad}\, g(x,y)$
- $\overrightarrow{grad}[\lambda f(x,y)] = \lambda \overrightarrow{grad}\, f(x,y)$
- $\overrightarrow{grad}[f g(x,y)] = f(x,y)\, \overrightarrow{grad}[g(x,y)] + \overrightarrow{grad}\, f(x,y) \cdot g(x,y)$

exp :

$f(x,y) = 5x^2 - xy + 2y^2$

$g(x,y) = x^2 \sin y$.

- $\overrightarrow{grad}\, f(x,y) = [10x - y, -x + 4y]$.
- $\overrightarrow{grad}\, g(x,y) = [2x \sin y, x^2 \cos y]$.
- $\overrightarrow{grad}(f+g)(x,y) = [10x - y + 2x \sin y, -x + 4y + x^2 \cos y]$
- $\overrightarrow{grad}\, f \cdot g(x,y) = (5x^2 - xy + 2y^2)[10x - y, -x + 4y] + (x^2 \sin y)[10x - y, -x + 4y]$