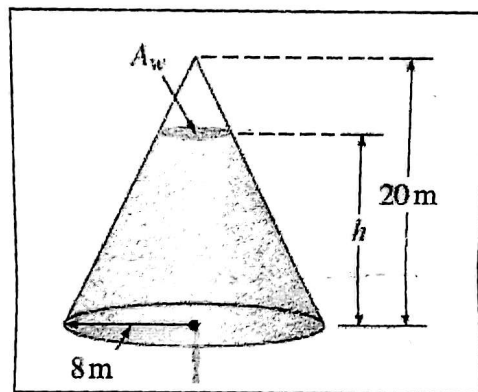


**Examen informatique et outils de calcul numérique**

Durée 1h30

**Exercice (6.5pts) :**

Un réservoir de forme **conique inversée** d'une **hauteur de 20 mètres**, et d'un **rayon de 8 mètres**, l'eau sort d'une vanne de **rayon 20 centimètres** située au bas du bac et **complètement ouverte**, comme montrer sur la figure suivante :



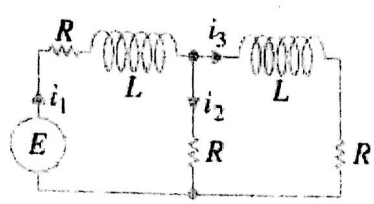
1. Trouver la valeur de  $A_w$  ? (1pts)
2. Trouver l'équation différentielle qui détermine la hauteur de l'eau  $h$  en fonction du temps  $t$  (on remplace simplement la valeur  $A_w$  dans l'équation de  $dh/dt$ ) ? (2pts)
3. En utilisant la méthode d'Euler explicite avec une précision de quatre décimales, calculer la hauteur du niveau d'eau après 5 seconde  $h(5)$  si on suppose que le bac de stockage été **plein** au départ ? (2.5pts)
4. Selon vous, le temps de vidage d'un bac en forme de cône inversé est plus court ou plus long que le temps de vidage d'un bac forme de cône ? Pourquoi ? (1pts)

**Exercice (7.5pts) :**

Quand  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R = 10 \Omega$  et  $L = 1 \text{ h}$ , le système d'équation différentielles pour déterminer l'intensité du courant  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  est le suivant :

$$\begin{cases} i_1' = -20i_1 + 10i_3 + 100 \\ i_3' = 10i_1 - 20i_3 \end{cases}$$

Et cela dans le réseau électrique comme montrer sur la figure suivante :



1. Si on a  $i_1(0) = 0$  et  $i_3(0) = 0$ , utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec une précision de quatre décimales pour calculer une approximation de  $i_1(t)$  et  $i_3(t)$  pour  $t = 0.1$   $t = 0.2$   $t = 0.3$   $t = 0.4$   $t = 0.5$  ? ( $i_1$  et  $i_3$  5pts) ?
2. Donner les instructions Matlab pour calculer la solution analytique ? (1pts)
3. Donner les instructions Matlab pour calculer les valeurs de  $i_1$  et  $i_3$  pour  $t = 0.1$   $t = 0.2$   $t = 0.3$   $t = 0.4$   $t = 0.5$  ? (1.5pts)

**Exercice 3 (7pts) :**

1. Donner la solution (avec démonstration) d'une équation différentielle de la forme  $y' = a*y + b$  (la démonstration 1pts, la forme de la solution 1pts) ?
2. Donner les instructions Matlab pour calculer la solution numérique dans l'intervalle  $[A,B]$  (on a  $y(A) = y_0$  et on cherche a calculer  $y(B)$ ) avec pas  $h$  en utilisant la fonction **Runge-Kutta interne** de Matlab ? (1pts)
3. Calculer la solution analytique pour chaque problème de valeur initiale suivant (1pts pour chaque solution) :
  - a)  $y' = 2y+1$  avec  $y(1) = 3$
  - b)  $3y'-y = 3$  avec  $y(2) = -1$
  - c)  $2y' = y-5$  avec  $y(0) = 2$
  - d)  $y-4y'-3 = 0$  avec  $y(-1) = 1$

Bon courage