École Supérieure en Informatique
ESI
Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي
سيدي بلعباس

ANALYSE II
CORRIGÉ DE L'EXAMEN
N° 2

Exercice.

1 • Déterminer a, b et $c \in \mathbb{R} /$ tels que : $\dfrac{-2}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

2 • Résoudre : $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

Solution/

1 • $\dfrac{2}{x(1-x^2)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

2 • Équation homogène associée : $x(x^2-1)y' + 2y = 0$, après séparation des variables, on a :
$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x(1-x^2)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} \Longrightarrow \ln\left|\dfrac{y}{C}\right| = \ln\left|\dfrac{x^2}{x^2-1}\right| \Longrightarrow y = \dfrac{Cx^2}{x^2-1}$.
Variation de la constante, posons :
$y = \dfrac{C(x)x^2}{x^2-1}$, substituant dans l'équation différentielle donnée, on trouve après calcul :
$x(x^2-1)\dfrac{C'(x)x^2}{x^2-1} = x^2 \Longrightarrow C'(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow C(x) = \ln|x| + k, \ k \in \mathbb{R}$.
D'où la solution générale $y = \dfrac{(\ln|x|+k)x^2}{x^2-1}$, ou encore pour k constante réelle quelconque,

$$y = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} + \frac{k\, x^2}{x^2-1}.$$

Remarque.

1 • Toutes les solutions sont continues en $x = 0$.

2 • Pour $k = 0$, seule la fonction c'est à dire la fonction $y = \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1}, & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si} \quad x = \pm 1, \\ 0, & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{x^2 \ln x}{x^2-1}, & \text{si} \quad x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

Exercice.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \qquad (\mathbf{A})$$
$$\frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}\cos x \qquad (\mathbf{B})$$

Solution/

L'équation $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ (A), peut être considérée comme différentielle HOMOGÈNE, ou de RICATTI, ou BERNOULLI.

1ère Méthode : Équation différentielle homogène

$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

posons $t = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xt \Longrightarrow y' = xt' + t$

remplaçons dans l'équation, on trouve :

$xt' = t^2 \Longrightarrow \frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{t} = \ln x + K_1 \Longrightarrow \frac{-1}{t} = -\frac{x}{y} = \ln x + K_1.$

On a finalement :

$$y = \frac{-x}{\ln x + K_1} = \frac{x}{-\ln x - K_1} = \frac{x}{-\ln x + C}.$$

2ème méthode : Équation de Bernoulli (ou de RICATTI avec solution particulière $y_0 = 0$) :

$y = 0$ est une solution de l'équation (A), cherchons d'autres solutions non nulles.

$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \Longleftrightarrow x^2y' - xy = y^2 \quad (A_1).$

Posons donc $z = \frac{1}{y}$, l'équation (A_1) devient $x^2z' + xz = -1 \quad (A_2)$, c'est une équation linéaire du premier ordre avec second membre. L'équation homogène associée est donc

$x^2z' + xz = 0 \Longrightarrow \frac{z'}{z} = \frac{-1}{x} \Longrightarrow \ln\left|\frac{z}{K}\right| = -\ \ln|x| \Longrightarrow z = \frac{K}{x}.$

Pour donner la solution générale de (A_2), il suffit de faire la variation de la constante, posons alors $z = \frac{K(x)}{x}$, en substituant dans (A_2), on trouve

$x^2\frac{K'(x)}{x} = -1 \Longrightarrow K'(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow K(x) = -\ln x + C.$

On a : $z = \frac{-\ln x + C}{x} = \frac{1}{y}, \Longrightarrow y = \frac{x}{-\ln x + C}.$

Finalement les solutions de (A) sont :

$$y = 0, \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{C - \ln x}.$$

$(\mathbf{B})$ $\quad \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}\cos x \Longrightarrow \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2}\cos x\,\mathrm{d}x,$

par intégration on obtient :

$-\sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2}\ \sin x + C$, ou encore

$$y^2 + \left(\frac{\pi}{2}\ \sin x + C\right)^2 = 1.$$

Exercice.

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$xy' - y - xy^2 = -9x^3, \qquad (\mathbf{F})\,;$$

1 • Déterminer $a > 0$ pour que $y_0 = ax$ soit une solution particulière de $(\mathbf{F})$

2 • Soit le changement de fonction inconnue :

$$y = y_0 - \frac{1}{u}.$$

Montrer que $(\mathbf{F})$ se transforme en

$$xu' + (6x^2 + 1)u = x \qquad (\mathbf{G})$$

3 • Résoudre $(\mathbf{G})$ sur $]0, \infty[$.

4 • En déduire les solutions de $(\mathbf{F})$ sur $]0, \infty[$.

SOLUTION/

1 • Soit $y_0 = ax$, substituant dans $(\mathbf{F})$, on a :

$x(a) - (ax) - x(a^2x^2) = -a^2x^3 = -9x^3 \iff a^2 = 9$ comme $a > 0$, donc $a = 3$.

2 • Soit $y = 3x - \dfrac{1}{u}$, en substituant dans $(\mathbf{F})$, on a

$$\begin{aligned} x\left(3 + \frac{u'}{u^2}\right) - \left(3x - \frac{1}{u}\right) - x\left(9x^2 + \frac{1}{u^2} - \frac{6x}{u}\right) &= -9x^3 \\ \Longrightarrow\ xu' + (6x^2+1)u = x. \quad (\mathbf{G}) \end{aligned}$$

3 • Résolution de $(\mathbf{G})$ sur $]0, \infty[$.

Soit $xu' + (6x^2 + 1)u = 0 \qquad (\mathbf{G.H})$, l'équation homogène associée. On a

$$\begin{aligned} \frac{u'}{u} &= -\frac{6x^2+1}{x} = -6x - \frac{1}{x} \\ \Longrightarrow\ \ln\left|\frac{u}{K}\right| &= -3x^2 - \ln x \Longrightarrow u = K\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x}. \end{aligned}$$

On a donc la solution générale de l'équation homogène. Pour résoudre $(\mathbf{G})$, utilisons la variation de la constante, posons :

$u = K(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x}$, dérivons et remplaçons dans $(\mathbf{G})$, on obtient :

$xK'(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x} = x \Longrightarrow K'(x) = x\,\mathrm{e}^{3x^2} \Longrightarrow K(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x^2}}{6} + C_1$.

D'où la solution générale de $(\mathbf{G})$:

$$u = K(x)\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x} = \left(\frac{\mathrm{e}^{3x^2}}{6} + C_1\right)\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x} = \frac{1}{6x} + C_1\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x}.$$

4 • La solution générale de $(\mathbf{F})$ est donnée par

$$y = 3x - \frac{1}{u} = 3x - \frac{1}{\dfrac{1}{6x} + C_1\dfrac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{x}} = 3x - \frac{6x}{1 + C\,\mathrm{e}^{-3x^2}} = 3x\,\frac{C - \mathrm{e}^{3x^2}}{C + \mathrm{e}^{3x^2}}.$$

Il y'a aussi la fonction $y_0 = 3x$ qui est une solution particulière, (cas où $C \longrightarrow \infty$).

Pour le cas où $C = 0$, on a l'autre solution particulière $y_0 = -3x$.

Exercice.

Soient l'équation différentielle du deuxième ordre,

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 - 5x, \qquad (\mathbf{E})\,;$$

et l'équation différentielle homogène associée :

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad (\mathbf{E.H.}).$$

1 • Trouver toutes les valeurs $n \in \mathbb{N}$ pour que $y_0 = x^n$ soit une solution de l'équation (**E.H.**).

2 • En déduire la solution générale de l'équation différentielle (**E.H.**).

3 • Dans (E), on pose $y = x.z$, où z est une fonction de x. Donner l'équation différentielle que vérifie z, puis donner sa solution générale.

4 • En déduire la solution générale de l'équation différentielle (**E**).

SOLUTION/

1 • Soit $y_0 = x^n$, remplaçons dans **(E.H.)**, on obtient

$n(n-1)x^n - 2nx^n + 2x^n = 0 \Longleftrightarrow (n^2 - 3n + 2)x^n = 0$, donc n doit vérifier $n^2 - 3n + 2 = 0$, équation qui a pour racines $n_0 = 1$ et $n_1 = 2$.

2 • Les deux fonctions x et x^2, sont donc solutions de l'équation homogène, comme elles sont linéairement indépendantes, la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène de deuxième ordre **(E.H)** est donc

$$Y = c_1x + c_2x^2.$$

3 • Posons $y = xz \Longrightarrow y' = xz' + z \Longrightarrow y'' = xz'' + 2z'$, remplaçons dans **(E)**, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz &= 3x^2 - 5x \\ x^3z'' &= 3x^2 - 5x \\ z'' &= \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} \quad (\mathbf{K}) \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation différentielle **(K)** est donc :

$z' = 3\ln|x| + \dfrac{5}{x} + C_1 \implies z = 3(x\ln|x| - x) + 5\ln|x| + xC_1 + A = (3x+5)\ln|x| + xB + A.$

4 • La solution générale de **(E)**, est donc :

$$y = xz = x(3x+5)\ln|x| + xB + A) = (3x^2 + 5x)\ln|x| + Ax + Bx^2.$$