ANALYSE 1
CORRIGÉ DE L'EXAMEN N° 2

Exercice 1 (3 Points).

Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = |x+1|, \quad x \in [-2,0]?$$

Solution :

La valeur absolue d'une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une une fonction continue sur I, c'est le cas de f. La fonction f est donc continue sur $[-2,0]$. **(1 Point)**

Étudions la dérivée de f, on a :

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x \in [-2,-1], \\ \\ x+1 & \text{si} \quad x \in [-1,0]. \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[-2,-1[$ et sur $]-1,0]$.

Étudions donc la dérivée point $x=-1$, on a :

$$\begin{cases} f'_g(-1) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} -1} \dfrac{(-x-1)-0}{x+1} = -1, & \textbf{(1 Point)} \\ \\ f'_d(-1) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} \dfrac{(x+1)-0}{x+1} = +1. & \textbf{(1 Point)} \end{cases}$$

f n'est pas dérivable en $x=-1$, on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[-2,0]$.

Exercice 2 (4 Points).

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation

$$x\,\mathrm{e}^{\sin x} = \cos x,$$

admet au moins une racine dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Utiliser le théorème de **Rolle**, pour montrer que cette racine est unique.

Solution :

1. Posons $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\sin x} - \cos x$. **(0.25 Point)**

f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **(0.25 Point)**

On a $f(0) = -1 < 0$ **(0.25 Point)**

et $f(\pi/2) = \dfrac{\pi\,\mathrm{e}}{2} > 0$, **(0.25 Point)**

d'où $f(0)f(\pi/2) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f possède **au moins une racine** dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. **(0.5 Point)**

2. Soit α la racine de f sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrons que cette racine est unique.

Supposons que β est une $2^{\text{ème}}$ racine de f, donc $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, **(0.5 Point)**

d'après le théorème de Rolle, il existe un nombre $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$ **(0.5 Point)**

On a $f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x} + x\cos x\,\mathrm{e}^{\sin x} + \sin x = (1 + x\cos x)\,\mathrm{e}^{\sin x} + \sin x$, **(0.5 Point)**

chaque terme figurant dans cette dérivée est strictement positif pour $0 < x < \pi/2$, donc $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) > 0$ d'où c tel que $f'(c) = 0$, n'existe pas. La racine de l'équation donnée est donc unique. **(1 Point)**

Exercice 3 (7 Points).

1. Donner le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $f(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 + x)$.
2. En déduire la valeur de $f''(0)$ et celle de $f^{(4)}(0)$.
3. Donner l'équation de la tangente en $x = 0$ tout en précisant sa position par rapport à la courbe au point 0.
4. Utiliser les développements limités pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}\ln^2(1 + x) - x^2 - x^3}{x^4}.$$

Solution :

1. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ **(0.5 Point)**

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ **(0.5 Point)**

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 + x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \qquad \textbf{(1.5 Point)}$$

2. La formule de Mac Laurin permet d'écrire,

$f(x) = \mathrm{e}^x \ln(1 + x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$.

Du résultat précédent, on a immédiatement :

$f''(0) = 1$ **(0.5 Point)** $f^{(4)}(0) = 0.$ **(0.5 Point)**

3. Le développement limité de f, donne l'équation de la tangente en $x = 0$, qui est $y = x$. **(0.5 Point)**
On a $f(x) - x = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$,
$\dfrac{x^2}{2}$ est toujours positif, la courbe est au dessus de sa tangente au voisinage de 0. **(0.5 Point)**

4. Calcul de la limite.

$$\begin{aligned} e^{2x}\ln^2(x+1) = (f(x))^2 &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + o(x^4), \\ &= x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o\left(x^4\right) \qquad \textbf{(1.5 Point)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{2x}\ln^2(1+x) - x^2 - x^3}{x^4} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{11}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{12} + \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{12}. \qquad \textbf{(1 Point)}$$

Exercice 4 (6 Points).

1. Donner le développement asymptotique de la fonction suivante
$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x-3)} - \frac{x}{2},$$
à l'ordre 2 en $1/x$, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. En déduire les asymptotes obliques et leur position par rapport au graphe de f.
3. Soit la suite $u_n = f(n)$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Solution :

1. Posons $x = \dfrac{1}{t}$,
quand x est au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, t est au voisinage de 0. **(0.5 Point)**
L'expression de$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x-3)}$ devient

$$e^t\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - 3\right)} = \frac{e^t}{|t|}\sqrt{1-3t}. \qquad \textbf{(0.5 Point)}$$

Si t est au voisinage de 0, il en est de même de $-3t$, appliquons la formule du binôme àl'ordre 3, puisqu'il y a une division par $|t|$.

$$\sqrt{1-3t} = 1 - \frac{3}{2}t - \frac{9}{8}t^2 - \frac{27}{16}t^3 + o(t^3). \qquad \textbf{(1 Point)}$$

Comme $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$,

$$\begin{aligned} f(1/t) &= \frac{1}{|t|}\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}t - \frac{9}{8}t^2 - \frac{27}{16}t^3\right) - \frac{1}{2t} + o(t^2) \\ &= \frac{1}{|t|}\left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{17}{8}t^2 - \frac{163}{48}t^3\right) - \frac{1}{2t} + o(t^2). \qquad \textbf{(1 Point)} \end{aligned}$$

• Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\begin{aligned} f(1/t) &= \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} - \frac{17t}{8} - \frac{163t^2}{48} + o(t^2), \\ f(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{17}{8x} - \frac{163}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \qquad \textbf{(0.5 Point)} \end{aligned}$$

L'équation de l'asymptote oblique est donc $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, **(0.25 Point)**
le terme suivant est $-\frac{17}{8x}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$, d'où la courbe se trouve en dessous de l'asymptote oblique. **(0.25 Point)**

• Au voisinage de $-\infty$ on a

$$\begin{aligned} f(1/t) &= -\frac{3}{2t} + \frac{1}{2} + \frac{17t}{8} - \frac{163t^2}{48} + o(t^2), \\ f(x) &= -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{17}{8x} + \frac{163}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \qquad \textbf{(0.5 Point)} \end{aligned}$$

L'équation de l'asymptote oblique est donc $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$, **(0.25 Point)**
le terme suivant est $\frac{17}{8x}$ qui est négatif au voisinage de $-\infty$, d'où la courbe se trouve en dessous de l'asymptote oblique. **(0.25 Point)**

3. Soit $u_n = f(n)$, la question précédente donne un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.
On a alors

$$u_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{17}{8n} - \frac{163}{48n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on a immédiatement

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{17}{8n^2} - \frac{163}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(1Point)}$$