$\mathcal{E}$. N. S. I. de $\mathcal{S}$idi-$\mathcal{B}$eℓ-$\mathcal{A}$bbès.
$\mathcal{C}$ycle $\mathcal{P}$réparatoire $\mathcal{I}$ntégré

$\mathcal{P}$remière année — Module : Algebre1

$\mathcal{R}$esponsables du module : $\mathcal{A}$. E. K. $\mathcal{G}$heriballah, $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$echab .

Examen N^{o}2
Mercredi 28/01/2015
Durée : 1h.30.

Exercice 1 (4pts). Etant données deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on note $\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ la proposition logique qui est vraie si

$$\Big(\mathcal{P} \text{ est vraie et } \mathcal{Q} \text{ est fausse}\Big), \text{ ou bien } \Big(\mathcal{P} \text{ est fausse et } \mathcal{Q} \text{ est vraie}\Big).$$

Montrer que si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont trois propositions logiques, alors :

$$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$$

Réponse. *Pour montrer l'équivalence des deux propositions, on compare leurs valeurs de vérité dans un tableau.*

$\mathcal{P}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{Q}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{R}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R}$	0	1	1	0	1	0	0	1
$(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$	0	1	1	0	0	1	1	0
$\mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$	0	1	1	0	1	0	0	1

on voit que les propositions $\mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$ et $(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc :

$$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$$

Exercice 2 (3pts). On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; où $E \subset \mathbb{R}$; définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (x+2)^2$$

Donner E pour que f soit injective.
Peut-on déterminer E pour que l'application f soit bijective ?

Réponse.
1. On sait qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$.
Soit $y \in \mathbb{R}$, il est claire que :

Si $y \leq 0$, l'équation $\Big(y = (x+2)^2\Big)$ admet au plus une solution dans E.

Si $y > 0$, les solutions ; dans $\mathbb{R}$; de l'équation $\Big(y = (x+2)^2\Big)$ sont $x_1 = \sqrt{y} - 2$ et $x_2 = -\sqrt{y} - 2$, donc $x_1 > -2$ et $x_2 < -2$. Ainsi, pour que l'équation ait au plus une solution <u>dans E</u>, il suffit de prendre $E = [-2, +\infty[$ ou bien $E =]-\infty, -2]$, par suite :

$$\boxed{\text{Pour que } f \text{ soit injective, il suffit que } E = [-2, +\infty[\text{ ou bien } E =]-\infty, -2]}$$

2. On ne peut pas trouver d'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ pour que f soit bijective, car pour tout $y \in]-\infty, 0[$, l'équation $\Big(y = (x+2)^2\Big)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc dans $E \subset \mathbb{R}$, ce qui montre que f n'est pas surjective, donc elle ne peut pas être bijective.

Exercice 3 (6pts).

I. Etant donnée une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\preceq$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}, \qquad \Big((x \preceq y) \Longleftrightarrow (x \leq y) \wedge (f(x) \leq f(y))\Big)$$

$\preceq$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$?

II. En prenant l'application $f : x \mapsto x^2$, es-ce que -2 est inférieur à 0, par rapport à cette relation d'ordre $\preceq$?
L'ordre est-il total ?
Donner les majorants et les minorants de $A = [-1, 2]$. A possède-t-il un plus grand et un plus petit élément ?

Réponse.

I. $\preceq$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, car :
i) $\preceq$ est Reflexive. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $(x \leq x)$ et comme f est une application alors $f(x) = f(x)$, donc $(f(x) \leq f(x))$, par suite :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x \leq x) \wedge (f(x) \leq f(x))$$

ce qui montre que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \preceq x$$

donc $\preceq$ est Reflexive.
ii) $\preceq$ est Transitive. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl}
(x \preceq y) \wedge (y \preceq z) & \Longleftrightarrow & \Big((x \leq y) \wedge (f(x) \leq f(y))\Big) \wedge \Big((y \leq z) \wedge (f(y) \leq f(z))\Big) \\
& \Longleftrightarrow & \Big((x \leq y) \wedge (y \leq z)\Big) \wedge \Big((f(x) \leq f(y)) \wedge (f(y) \leq f(z))\Big) \\
& \Longrightarrow & (x \leq z) \wedge (f(x) \leq f(z)) \qquad car \ \leq \text{ est transitive dans } \mathbb{R} \\
& \Longrightarrow & x \preceq z
\end{array}$$

ce qui montre que $\preceq$ est Transitive.
iii) $\preceq$ est Anti-Symétrique. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcl}
(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) & \Longleftrightarrow & \Big((x \leq y) \wedge (f(x) \leq f(y))\Big) \wedge \Big((y \leq x) \wedge (f(y) \leq f(x))\Big) \\
& \Longrightarrow & (x \leq y) \wedge (y \leq x) \\
& \Longrightarrow & (x = y), \qquad \text{car } \leq \text{ est Anti-symétrique}
\end{array}$$

ce qui montre que $\preceq$ est Anti-symétrique.
De i), ii) et iii), on déduit que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

II. On prend $f : x \mapsto x^2$.
i) $-2 \preceq 0$? On a :

$$\Big(-2 \preceq 0\Big) \Longleftrightarrow (-2 \leq 0) \wedge (f(2) \leq f(x)) \Longleftrightarrow (-2 \leq 0) \wedge (4 \leq 0) \text{ ce qui est absurde}$$

donc -2 **n'est pas inférieur à** 0.
ii) L'ordre est-il total ? D'après la question précédente, $(-2 \preceq 0)$ est fausse ; de même $(0 \preceq -2)$ est fausse car :

$$(0 \preceq -2) \Longleftrightarrow (0 \leq -2) \wedge (f(0) \leq f(-2)) \quad absurde$$

ce qui montre que (-2) et 0 ne sont pas comparables, donc **l'ordre est partiel**.
iii)_1 Les majorants de $A = [-1, 2]$. Soit $M \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} M \text{ majorant de } A & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ x \preceq M \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ (x \leq M) \wedge (f(x) \leq f(M)) \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ (x \leq M) \wedge (x^2 \leq M^2) \\ & \Longrightarrow & (2 \leq M) \wedge (4 \leq M^2) \Longrightarrow 2 \leq M \end{array}$$

et il est évident que :

$$(2 \leq M) \Longrightarrow \Big(\forall x \in A,\ x \preceq M\Big)$$

donc l'ensemble des majorants de A est $\mathfrak{M} = [2, +\infty[$.
iii)_2 Les minorants de $A = [-1, 2]$. Soit $m \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcll} m \text{ minorant de } A & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ m \preceq x & \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ (m \leq x) \wedge (f(m) \leq f(x)) & \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in [-1,2],\ (m \leq x) \wedge (m^2 \leq x^2) & (\star) \end{array}$$

or

$$\forall x,\ m \in \mathbb{R}, \qquad (m \leq x < 0) \Longrightarrow (m^2 > x^2) \Longrightarrow (m \npreceq x)$$

En prenant dans $(\star)$ $x < 0$, on voit que $\Big(\forall m \in \mathbb{R},\ $ m n'est pas un minorant de $A\Big)$, par suite l'ensemble des minorants de A est $\mathfrak{m} = \emptyset$.
iii)_3 Plus grand élément de $A = [-1, 2]$. D'après iii_1) , le plus grand élément de A est $g = 2$.
iii)_4 Plus petit élément de $A = [-1, 2]$. D'après iii_2) , A n'a pas de plus petit élément.

Exercice 4 (4pts)**.** Etant donné le polynôme $P(X) = X^5 + X^4 - 5X^3 - X^2 + 8X - 4$.
Donner toutes les racines de $P(X)$, en précisant leurs multiplicités respectives.
Déduire que le polynôme $Q(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2$ et le polynôme $P(X)$ sont premiers entre eux.
Déduire PGCD(P, Q) et PPCM(P, Q).

Réponse.
I. On voit que $P(1) = 1 + 1 - 5 - 1 + 8 - 4 = 0$, donc $x_1 = 1$ est une racine de $P(X)$. Pour déterminer la multiplicité de cette racine, on calcule les dérivées successives de $P(X)$ en $X = x_1$. On a :

$$\begin{array}{lcl} P^{(1)}(X) = 5X^4 + 4X^3 - 15X^2 - 2X + 8 & \Longrightarrow & P^{(1)}(1) = 5 + 4 - 15 - 2 + 8 = 0 \\ P^{(2)}(X) = 20X^3 + 12X^2 - 30X - 2 & \Longrightarrow & P^{(2)}(1) = 20 + 12 - 30 - 2 = 0 \\ P^{(3)}(X) = 60X^2 + 24X - 30 & \Longrightarrow & P^{(3)}(1) = 60 + 24 - 30 \neq 0 \end{array}$$

d'où on déduit que $x_1 = 1$ est une racine de $P(X)$ **de multiplicité** $m_1 = 3$.
Pour déterminer les autres racines de $P(X)$, en divisant $P(X)$ par $(X - x_1)^3$, on obtient :

$$P(X) = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1)(X^2 + 4X + 4) = (X+1)^3(X+2)^2$$

d'où on déduit que la deuxième racine de $P(X)$ est $x_2 = -2$, qui est **de multiplicité** $m_2 = 2$.
II. Sachant que toutes les racines de $P(X)$ sont réelles ; $(m_1 + m_2 = d^o(P))$; pour montrer que P et Q sont premiers entre eux, il suffit de vérifier que les racines de $P(X)$ ne sont pas des racines de $Q(X)$. On a :

$$\Big(Q(1) = 1 + 1 - 3 - 5 - 2 = -8 \neq 0\Big) \wedge \Big(Q(-2) = 16 - 8 - 12 + 10 - 2 = 4 \neq 0\Big)$$

d'où on déduit que P et Q son premiers entre eux.
III. Comme P et Q son premiers entre eux, alors

$$\Big(\mathtt{PGCD}(P,Q) = 1\Big) \wedge \Big(\mathtt{PPCM}(P,Q) = P(X)Q(X) \qquad \text{car } P \text{ et } Q \text{ unitaires } ^1\Big)$$

Exercice 5 (3pts). *Décomposer en éléments simples ; dans $\mathbb{R}(X)$; la fraction rationnelle*

$$F(X) = \frac{3X^2+1}{(X^2+1)(X+1)^2}.$$

Réponse. La fraction $F(X)$ étant irréductible et le degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur, alors la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est de la forme :

$$F(X) = \frac{3X^2+1}{(X^2+1)(X+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{c}{(X+1)} + \frac{d}{(X+1)^2}$$

Pour déterminer les constantes $a,\ b,\ c\ et\ d \in \mathbb{R}$, il y a plusieurs méthodes et la plus directe est de réduire le deuxième membre au même dénominateur et identifier les numérateurs.
On a :

$$F(X) = \frac{(a+c)X^3 + (2a+c+d+b)X^2 + (a+2b+c)X + (b+c+d)}{(X^2+1)(X+1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ 2a+c+d+b=3 \\ a+2b+c=0 \\ b+c+d=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ -2c+c+(1-c-b)+b=3 \\ 2b=0 \\ d=1-c-b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ -2c+1=3 \\ b=0 \\ d=1-c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \\ b=0 \\ d=2 \end{cases}$$

donc

$$\boxed{F(X) = \frac{X}{(X^2+1)} - \frac{1}{(X+1)} + \frac{2}{(X+1)^2}}$$

FIN

1. " $\mathtt{PPCM}(P,Q) = 8 + 4X - 26X^2 - 13X^3 + 30X^4 + 15X^5 - 14X^6 - 7X^7 + 2X^8 + X^9$ "