École Supérieure en Informatique ESI Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي 08 ماي 1945 - سيدي بلعباس -

Analyse II Corrigé De L'examen N°1

Première Année C.P.I.

Exercice 1 (5=2+3 points).

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathbb{I} = \displaystyle\int t^4 \ln(1+3t)\,\mathrm{d}t$,
2. $\mathbb{J} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Solution :

1. Calcul de $\mathbb{I}$. Faisons une intégration par parties donne :

$$\mathbb{I} = \int t^4 \ln(1+3t)\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5}\ \ln(1+3t) - \int \frac{t^5}{5}\,\frac{3}{1+3t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5}\ln(1+3t) - \frac{3}{5}\int \frac{t^5}{1+3t}\,\mathrm{d}t,$$

une division euclidienne de t^5 par $1+3t$ donne

$$\frac{t^5}{1+3t} = \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{27}t^2 - \frac{1}{81}t + \frac{1}{243} - \frac{1}{243\,(3t+1)}$$

Après simplifications des calculs, on obtient :

$$\mathbb{I} = \int t^4 \ln(1+3t) = \frac{243t^5+1}{1215}\ln(3t+1) - \frac{t^5}{25} + \frac{1}{60}t^4 - \frac{1}{135}t^3 + \frac{t^2}{270} - \frac{t}{405} + C$$

2. Calcul de $\mathbb{J}$.
Ici on a besoin de la forme canonique de $2x-x^2$.
Il est facile de remarquer que $x^2-2x=(x-1)^2-1$,
notre intégrale se simplifiera donc, quand on remplace $x-1$ par t :

$$\mathbb{J} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t + C = \operatorname{Arcsin}(x-1) + C$$

2$^{\text{ème}}$ méthode :
Pour $x \in]0,2[$, on a $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{x}\sqrt{2-x}$.
Dans l'intégrale, posons $t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{J} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t\sqrt{2-t^2}} \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(t/\sqrt{2})}{\sqrt{1-(t/\sqrt{2})^2}} \\ &= 2\,\mathrm{Arcsin}(t/\sqrt{2}) + C_1 = 2\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2}} + C_1.\end{aligned}$$

3$^{\text{ème}}$ méthode :
Le changement de variable suivant (*substitution d'Euler*) : $\sqrt{2x-x^2} = tx$, donne pour résultat

$$\mathbb{J} = -2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{2-x}{x}} + C_2.$$

Remarque : $\forall x \in [0,2] \quad \mathrm{Arcsin}(x-1) = 2\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{2-x}{x}}\cdot$

Exercice 2 (2 Points).

Utiliser la formule de la moyenne pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \int_t^{3t} \frac{\sqrt{1+\mathrm{ch}\,x}}{x}\ \mathrm{d}x\,.$$

Solution :
Posons $f(x) = \sqrt{1+\mathrm{ch}\,x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}\cdot$
Les deux fonctions sont continues pour $x > 0$.
$1/x$ a un signe contant, qui est positif pour $x > 0$ sur l'intervalle $[t, 3t]$ avec $t > 0$.
D'après le théorème de la moyenne, $\exists c \in [t, 3t]$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_t^{3t} \frac{\sqrt{1+\mathrm{ch}\,x}}{x}\ \mathrm{d}x &= f(c)\int_t^{3t} g(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\int_t^{3t}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\,\Big[\ln(x)\Big]_t^{3t} \\ &= \sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\,\Big(\ln(3t)-\ln(t)\Big) = \sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\,\Big(\ln(3t)/(t)\Big) \\ &= \sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\ \ln 3.\end{aligned}$$

On a $t \leqslant c \leqslant 3t$ si $t \longrightarrow 0^+$ donc $c \longrightarrow 0^+$, on a alors :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\int_t^{3t}\frac{\sqrt{1+\mathrm{ch}\,x}}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{c\longrightarrow 0^+}\sqrt{1+\mathrm{ch}\,c}\ \ln 3 = \sqrt{2}\ \ln 3.$$

Exercice 3 (4=1+3 points).

1. Calculer la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\,x + x\ln\left(x^2+1\right)$$

2. Utiliser la formule de Riemann pour calculer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}.$$

Solution :

1. Calcul de la dérivée

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \ln(1+x^2) = \ln(1+x^2) + 2$$

2. Soit $v_n = \ln u_n$, on a alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

D'après la question précédente, une primitive de $\ln(1+x^2)$ est $(2\,\mathrm{Arctan}\,x + x\ln(x^2+1)) - 2x$.
On a : :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = \left[2\,\mathrm{Arctan}\,x + x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\right]_0^1 = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 + \ln 2 - 2 = 2\frac{\pi}{4} + \ln 2 - 2 = \frac{\pi}{2} + \ln 2 - 2.$$

Comme $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, finalement :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \mathrm{e}^{\pi/2+\ln 2-2} = 2\ \mathrm{e}^{\pi/2-2} = 2\ \mathrm{e}^{(\pi-4)/2}\,.$$

Exercice 4 (5=2+1+2 points).

%4 1. Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 5 de

$$f(x) = (6 + x - 11x^2)\sin x - (6x + x^2)\cos(2x).$$

2. A t-on un extremum local en 0 ? Si c'est oui préciser sa nature et sa valeur.
3. Utiliser le développement limité précédent pour calculer la limite suivante, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

Solution :

1.‘Développement limité :

$$\begin{aligned}(6+x-11x^2)\sin x &= (6+x-11x^2)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)\\ &= 6x+x^2-12x^3-\frac{x^4}{6}+\frac{113x^5}{60}+o(x^5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6x+x^2)\cos(2x) &= (6x+x^2)\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)\right)\\ &= 6x+x^2-12x^3-2x^4+4x^5+o(x^5),\end{aligned}$$

$$f(x)=(6+x-11x^2)\sin x-(6x+x^2)\cos(2x) = \frac{11x^4}{6}-\frac{127}{60}x^5+o(x^5).$$

2. Au voisinage de 0 on a, $f(x)=\frac{11x^4}{6}-\frac{127}{60}x^5+o(x^5)$, comme le terme $\frac{11x^4}{6}$ est toujours positif, on a alors un minimum local.
La valeur de ce minimum est $f(0)=0$
3. Calcul de la limite.

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{11}{6}-\frac{127}{60}x+o(x)\right)=\frac{11}{6}.$$

Exercice 5 (4=2+2 points).

1. Donner le développement asymptotique de la fonction suivante
$$f(x)=\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1,$$
à l'ordre 1 en $1/x$, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
2. En déduire les asymptotes obliques et leur position par rapport au graphe de f.

Solution :

Faisons un changement de variable, posons $t=1/x$, donc si x est au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, alors t est au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right) &= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+3\left(\frac{1}{t}\right)-2}+2\left(\frac{1}{t}\right)+1\\ &= \frac{\sqrt{1+3t-2t^2}}{|t|}+\frac{2}{t}+1.\end{aligned}$$

Donnons le développement limité de $\sqrt{1+3t-2t^2}$ à l'ordre 2(puisqu'on va diviser par t pour avoir l'ordre 1 en $1/x$), si t est au voisinage de 0, alors $(3t-2t^2)$ est aussi au voisinage de 0.

Appliquons la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+(3t-2t^2)} &= (1+(3t-2t^2))^{1/2}\\ &= 1+(1/2)(3t-2t^2)+\frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}(3t-2t^2)^2+o(t^2)\\ &= 1+\frac{3}{2}t-\frac{17}{8}t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

Développement au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\sqrt{1+3t-2t^2}}{t}+\frac{2}{t}+1 &= \frac{1}{t}\left(1+\frac{3}{2}t-\frac{17}{8}t^2+o(t^2)\right)+\frac{2}{t}+1\\ \left(\frac{1}{t}+\frac{3}{2}-\frac{17}{8}t+o(t)\right)+\frac{2}{t}+1 &= \frac{5}{2}+\frac{3}{t}-\frac{17}{8}t+o(t).\end{aligned}$$

Finalement au voisinage de $+\infty$:

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=\frac{5}{2}+3x-\frac{17}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe de la fonction $f(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=\frac{5}{2}+3x$.

On a $f(x)-\left(\frac{5}{2}+3x\right)=-\frac{17}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, comme $-\frac{17}{8x}$ est négatif au voisinage de $+\infty$: la courbe est au dessous de son asymptote oblique.

Développement au voisinage de $-\infty$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\sqrt{1+3t-2t^2}}{-t}+\frac{2}{t}+1 &= \frac{1}{t}\left(-1-\frac{3}{2}t+\frac{17}{8}t^2+o(t^2)\right)+\frac{2}{t}+1\\ \left(-\frac{1}{t}-\frac{3}{2}+\frac{17}{8}t+o(t)\right)+\frac{2}{t}+1 &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{t}+\frac{17}{8}t+o(t).\end{aligned}$$

Finalement au voisinage de $-\infty$:

$$f(x)=\sqrt{x^2+3x-2}+2x+1=-\frac{1}{2}+x+\frac{17}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe de la fonction $f(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=-\frac{1}{2}+x$.

On a $f(x)-\left(-\frac{1}{2}+x\right)=\frac{17}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, comme $\frac{17}{8x}$ est négatif au voisinage de $+\infty$: la courbe est au dessous de son asymptote oblique.