École Supérieure en Informatique — ESI Sidi Bel Abbes — المدرسة العليا للإعلام الآلي سيدي بلعباس

ANALYSE II

EXAMEN

N° 1

Jeudi 16 avril 2015

de 8h 30mn à 10h 30mn

Durée 2 heures.

Exercice 1 Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$. Montrer en utilisant le changement de variable $t=\pi-x$, que l'on a :

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 2 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En majorant la fonction à intégrer, montrer que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
4. De la question précédente, déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot$

Exercice 3 Déterminez les deux limites suivantes,

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\int_{2x}^{5x}\frac{1-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k).$$

Exercice 4 Calculer les primitives suivantes :

$$J = \int \frac{(1-2\sin 2x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-x}},$$

$$K = \int \frac{\cos x\ \ \mathrm{d}x}{\sin x+\cos x},\quad L = \int\frac{\sin x\ \ \mathrm{d}x}{\sin x+\cos x},\quad \text{(on calculera } K+L \text{ et } K-L).$$

Exercice 5 Dire pourquoi les intégrales suivantes sont convergentes, puis les calculer.

$$A = \int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}\cdot$$

$$B = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Interdit d'utiliser les portables et les calculatrices.

Mr O. Bouabdallah — Mr T. Bencheikh — Mr N. Amroun

ESI — École Supérieure en Informatique — Sidi Bel Abbes — المدرسة العليا للإعلام الآلي سيدي بلعباس

ANALYSE II

EXAMEN

N° 1

Jeudi 16 avril 2015

de 8h 30mn à 10h 30mn

Durée 2 heures.

Exercice 1 (5 Points).

Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$. Montrer en utilisant le changement de variable $t=\pi-x$, que l'on a :

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x\,.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$

Solution 1

Soit $I=\displaystyle\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ et $t=\pi-x \iff x=\pi-t$, d'où $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, on a alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_\pi^0 (t-\pi)f(\sin(t-\pi))(-\mathrm{d}t) = -\int_\pi^0 (\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad (\mathbf{0.5\ Point})\\
&= \int_0^\pi (\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t\\
&= \pi\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t - I. \qquad (\mathbf{0.5\ Point})
\end{aligned}$$

Finalement

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (\mathbf{1\ Point})$$

Soit $J=\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$(**0.5 Point**)

D'où :

$$J=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{3+\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{3+(1-\cos^2 x)} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{4-\cos^2 x}.$$

Posons $t=\cos x$, on obtient $J=\displaystyle\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-\,\mathrm{d}t}{4-t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{4-t^2} = \pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4-t^2}$,

Après décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle, on a

$$J=\pi\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+t}+\frac{1}{2-t}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left(\ln(2+t)-\ln(2-t)\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 3.(\mathbf{2\ Points})$$

Exercice 2 (4 Points).

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En majorant la fonction à intégrer, montrer que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Calculer $u_n = I_n + I_{n+1}$.
4. De la question précédente, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Solution 2

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$ **(0.5 Point)**

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = x - \ln(1+x)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$ **(0.5 Point)**

2. $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 1+x \leqslant 2 \iff 0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n.$

On a alors $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$ d'où $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$ **(0.5 Point)**

La limite est immédiate $0 \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} I_n \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on a donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} I_n = 0.$ **(0.5 Point)**

3.

$$\begin{aligned} u_n = I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ u_n = I_n + I_{n+1} &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$ **(0.5 Point)**

4. Soit

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ &= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - (I_3 + I_4) + \cdots + (-1)^{n+1}(I_{n-1} + I_n) \\ &= I_0 + (-1)^{n+1} I_n. \end{aligned}$$

D'après la 2ème question, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\longrightarrow\infty} (I_0 + (-1)^{n+1} I_n) = I_0 + 0 = \ln 2.$$ **(1.5 Point)**

Ou encore :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \ln 2.$$

Exercice 3 (**4 Points**).

Déterminez les deux limites suivantes,

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\int_{2x}^{5x}\frac{1-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k).$$

Solution 3

1.

Soit $h(x)=\displaystyle\int_{2x}^{5x}\frac{1-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t=\int_{2x}^{5x}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t\,.$

Posons $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ et $g(t)=\dfrac{1}{t}$.

f est continue pour tout $t\in[2x,5x]$ avec $x>0$. g a un signe constant, qui est positif, sur l'intervalle $[2x,5x]$. En appliquant le théorème de la moyenne, il existe alors un nombre $c\in[2x,5x]$ telle que $h(x)=f(c)\displaystyle\int_{2x}^{5x}g(t)$ (**1 Point**),

$$\begin{aligned} h(x)=f(c)\int_{2x}^{5x}g(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1-\cos c}{c^2}\int_{2x}^{5x}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t=\frac{1-\cos c}{c^2}\ln t\Big|_{2x}^{5x} \\ &= \frac{1-\cos c}{c^2}\ln\frac{5x}{2x}=\frac{1-\cos c}{c^2}\ln\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Si x tend vers 0, c tend aussi vers 0, d'où

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}h(x)=\lim_{c\longrightarrow 0^+}\frac{1-\cos c}{c^2}\ln\frac{5}{2}=\lim_{c\longrightarrow 0^+}\frac{\sin c}{2c}\ln\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}\cdot \qquad (\textbf{1 Point})$$

2.

Soit la formule De Riemann :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\longrightarrow\infty}S_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On a

$$S_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\,\frac{n-k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right). \qquad (\textbf{1 Point})$$

D'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}S_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}=\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\cdot \qquad (\textbf{1 Point})$$

Exercice 4 (4 Points).

Calculer les primitives suivantes :

$$J = \int \frac{(1-2\sin 2x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-x}},$$

$$K = \int \frac{\cos x\ \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x},\quad L = \int \frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x},\quad \text{(on calculera } K+L \text{ et } K-L\text{)}.$$

Solution 4

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(1-2\sin 2x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-x}} = \int \mathrm{e}^{x}(1-2\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x - 2\int \mathrm{e}^{x}\sin 2x\,\mathrm{d}x \qquad (\mathbf{0.5\ Point}) \\ &= \mathrm{e}^{x} - \frac{2}{5}e^{x}\sin 2x + \frac{4}{5}e^{x}\cos 2x + C = \frac{\mathrm{e}^{x}}{5}\,(5 - 2\sin 2x + 4\cos 2x) + C. \qquad (\mathbf{1.5\ Point}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K+L &= \int \frac{(\cos x + \sin x)\ \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \int \mathrm{d}x = x + C_1, \qquad (\mathbf{0.5\ Point}) \\ K-L &= \int \frac{(\cos x - \sin x)\ \mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C_2. \qquad (\mathbf{0.5\ Point}) \end{aligned}$$

Par addition et soustraction, on obtient :

$$\begin{aligned} K &= \frac{x + \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C, \qquad (\mathbf{0.5\ Point}) \\ L &= \frac{x - \ln|\sin x + \cos x|}{2} + D, \qquad (\mathbf{0.5\ Point}) \end{aligned}$$

Exercice 5 (4 Points).

Dire pourquoi les intégrales suivantes sont convergentes, puis les calculer.

$$A = \int_{1/2}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}.$$

$$B = \int_{0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Solution 5

L'intégrale $A = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$, est impropre seulement au Point $t = 1$.

au voisinage de 1, on a $\dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

L'intégrale $M = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t\Big|_{1/2}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$.

Comme M est convergente, il en est de même de A. (**1 Point**)

(On peut aussi écrire, $t\sqrt{1-t^2} = t\sqrt{(1+t)(1-t)} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-t}$, et on a donc :

$N = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = -\sqrt{2}.\sqrt{1-t}\,\Big|_{1/2}^{1} = 1$)

Pour calculer A, posons $t = \sin x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{-d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1/2}{\cos x - 1} - \frac{1/2}{\cos x + 1} \right) d(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\ln\left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right| \right)_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(0 - \ln\left| \frac{1-\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2} \right| \right) = \frac{1}{2}\left(-\ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3} = \ln(2+\sqrt{3}). \qquad (\textbf{1 Point})
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale B, la borne 0 est impropre.

Décomposons notre intégrale en deux intégrales.

$B = \displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt + \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt.$

Au voisinage de 0, on a le résultat suivant,

$$\left(\int_{0}^{1/2} \frac{dt}{t^{\alpha}|\ln t|^{\beta}} \quad \text{converge} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1, \text{ et } \beta > 1).$$

Comme $\alpha = 1/2, B$ est donc somme de deux intégrales convergentes. (**1 Point**)

Pour le calcul de B, posons $x = \sqrt{t} \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, remplaçons dans l'intégrale, on obtient :

$B = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{0}^{1} 4\ln x\, dx = 4(x\ln x - x)\Big|_{0}^{1} = -4.$ (**1 Point**)