École Supérieure en Informatique ESI Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي
08 ماي 1945 - سيدي بلعباس -

Analyse I

CORRIGÉ DE L'EXAMEN N$^{\text{o}}$ 1

Première Année C.P.I.

Durée 2h

Exercice 1 **(6 pts)**
Calculer les limites suivantes, k réel donné, strictement positif.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\sin\left(1+\frac{1}{\sin x}\right),\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x+5},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5\sin^3 x)}{2x^3},\quad \lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\frac{k}{x}\right].$$

Solution 1

$$\boxed{\ell_1 = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\sin\left(1+\frac{1}{\sin x}\right).}$$

On a :

$$0 \leqslant \left|\sqrt{x}\sin\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\right| \leqslant |\sqrt{x}| \times 1 = \sqrt{x}\underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Finalement :

$$\boxed{\ell_1 = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\sin\left(1+\frac{1}{\sin x}\right) = 0.}$$

1,5 pt

$$\boxed{\ell_2 = \lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\frac{k}{x}\right].}$$

Pour x très grand, en particulier pour $x > k$, on a donc $0 < \frac{k}{x} < 1$, alors $\left[\frac{k}{x}\right] = 0$, la fonction est donc nulle. La limite vaut zéro.

$$\boxed{\ell_2 = \lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\frac{k}{x}\right] = 0.}$$

1,5 pt

Ajoutons une remarque en plus, si on avait donné la limite à $-\infty$, alors pour x négatif très grand en valeur absolue et pour $-x > k$, on a donc $-1 < \frac{k}{x} < 0$, alors $\left[\frac{k}{x}\right] = -1$, d'où

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} x\left[\frac{k}{x}\right] = +\infty.$$

$$\boxed{\ell_3 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x+5}}$$

On a :

$$\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x+5} = \left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{4x+5} = \left[\left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{2x-1}}\right]^{4x+5}$$

$$= \left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2(4x+5)}{x-1}} = \left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{8x+10}{2x-1}}.$$

Posons : $t = \dfrac{2}{2x-1} \xrightarrow[x\longrightarrow\infty]{} 0$, on a donc $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}(1+t)^{1/t} = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$,

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{8x+10}{2x-1} = 4$,

alors finalement :

$$\boxed{\ell_3 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x+5} = \mathrm{e}^4\,.}$$

1,5 pt

On peut aussi procéder directement, pour ceux qui ont directement utiliser la formule :

Posons $u = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ et $v = 4x+5$, alors $\ell_3 = \mathrm{e}^k$ où $k = \lim\limits_{x\to\infty} v(u-1)$.

$$\lim_{x\to\infty} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}(4x+5)\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2(4x+5)}{2x-1}\right) = 4 \implies \ell_3 = \mathrm{e}^4\,.$$

$$\boxed{\ell_4 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5\sin^3 x)}{2x^3}.}$$

$$\frac{\sin(5\sin^3 x)}{2x^3} = \frac{\sin(5\sin^3 x)}{5\sin^3 x}\times\frac{5\sin^3 x}{2x^3} = \frac{\sin T}{T}\times\frac{5}{2}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \xrightarrow[(T,x)\longrightarrow(0,0)]{} 1\times\frac{5}{2}\times 1^3 = 5/2.$$

$$\boxed{\ell_4 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5\sin^3 x)}{2x^3} = \frac{5}{2}.}$$

1,5 pt

Exercice 2 **(6 pts)**

Pour tout entier naturel n on pose : $u_0 = 3/2$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ pour $n \geqslant 0$.

1 • Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $3/2 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2 • Montrer que (u_n) est croissante.

3 • Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution 2

1 • Raisonnons par récurrence.
u_0 vérifie la double inégalité, la condition initiale est vérifiée.
Supposons la condition vraie à l'ordre n, on a alors :

$$3/2 \leqslant u_n \leqslant 2 \Longleftrightarrow 9/2 \leqslant 3u_n \leqslant 6 \Longleftrightarrow 5/2 \leqslant 3u_n - 2 \leqslant 4,$$

comme $5/2 = 10/4 > 9/4$ d'où :

$$9/4 < 3u_n - 2 \leqslant 4 \Longleftrightarrow 3/2 < \sqrt{3u_n - 2} \leqslant 2.$$

2 pts

Finalement la double inégalité est vérifiée pur tout n dans $\mathbb{N}$.

2 • Montrons que (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n - 2} - u_n = \frac{(3u_n - 2) - u_n^2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} = \frac{(3u_n - 2) - u_n^2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n}.$$

$\sqrt{3u_n - 2} + u_n$ est <u>strictement supérieur</u> à 0, car :
$\sqrt{3u_n - 2} + u_n = u_{n+1} + u_n > 3/2 + 3/2 = 3$, d'où :

$$(3u_n - 2) - u_n^2 = -(u_n - 1)(u_n - 2) \geqslant 0, \quad \text{car} \quad u_n - 1 > 0 \quad \text{et} \quad u_n - 2 \leqslant 0.$$

$$\boxed{(u_n) \quad \text{est croissante.}}$$

2 pts

3 • u_n est majorée par 2 et est croissante, elle est donc convergente.
Posons $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n$, on a donc

$$\ell = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} (\sqrt{3u_n - 2}) \implies \ell = \sqrt{3\ell - 2} \implies \ell^2 - 3\ell - 2 = (\ell - 2)(\ell - 1) = 0.$$

Comme $u_n \geqslant 3/2$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = 2.}$$

2 pts

Exercice 3 (8 pts)

1 • Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

2 • Établir que pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$, $2(\sqrt{n+1}-1)<\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

3 • En déduire la partie entière du nombre :

$$\mathbb{A}=\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{10000}}.$$

4 • Prouver que la suite suivante est bornée et monotone, puis conclure.

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}.$$

Solution 3

1 • On a :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On a aussi :

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Finalement

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}, \quad (\star)$$

2 pts

2 • Dans la double inégalité, $(\star)$, donnons des valeurs à n,

$$\begin{array}{ccccc}
\sqrt{2}-\sqrt{1} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{1}} & < & \sqrt{1}-\sqrt{0}\\
\sqrt{3}-\sqrt{2} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & < & \sqrt{2}-\sqrt{1}\\
\sqrt{4}-\sqrt{3} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & < & \sqrt{3}-\sqrt{2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\sqrt{n}-\sqrt{n-1} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{n-1}} & < & \sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}\\
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} & < & \dfrac{1}{2\sqrt{n}} & < & \sqrt{n}-\sqrt{n-1}
\end{array}$$

En faisant la sommation de tous les termes, on obtient

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\sqrt{n}-\sqrt{0},$$

finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}^\star$:

$$2(\sqrt{n+1}-1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}. \quad (\star\star)$$

2 pts

3 • De la double inégalité $(\star\star)$, on a pour $n = 10\ 000$:

$$\sqrt{10\ 001} - 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\ 000}}\right) < \sqrt{10\ 000} = 100$$

comme $\sqrt{10\ 001} - 1 > \sqrt{10\ 000} - 1 = 100 - 1 = 99$ on a donc :

$$99 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\ 000}}\right) < \sqrt{10\ 000} = 100$$

Finalement

$$99 < \mathbb{A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2\sqrt{9\ 999}} + \frac{1}{200} < 100$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{E}(\mathbb{A}) = 99.$$

2 pts

4 • Montrons que (u_n) est bornée.
Utilisons donc la double inégalité démontrée en $(2\ \bullet)$.

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{n+1}-1) &< \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \\
2(\sqrt{n+1}-1) - 2\sqrt{n} &< \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} < 0,
\end{aligned}$$

on a donc

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) - 2 = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 2 < u_n < 0$$

$$-2 < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - 2 < u_n < 0.$$

(u_n) est majorée par 0 et minorée par 2, elle est donc bornée.
Montrons que (u_n) est monotone.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
&= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}} < 0.
\end{aligned}$$

(u_n) est donc décroissante.

Conclusion : (u_n) étant bornée et décroissante, elle est donc convergente.

2 pts