École Supérieure en Informatique ESI Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي سيدي بلعباس

CORRIGÉ DE L'EXAMEN N° 1 D'ANALYSE I.

École Supérieure en Informatique ESI Sidi Bel Abbes
المدرسة العليا للإعلام الآلي سيدي بلعباس

CORRIGÉ CORRIGÉ CORRIGÉ CORRIGÉ CORRIGÉ

Exercice 1.

① Démontrer l'égalité :

$$X^n - 1 = (X-1)(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{n-1}) \qquad \text{pour } n \geqslant 1. \quad \textbf{(1 Point)}$$

② Soit la fonction $f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$,

❀ Montrer que si $x > 1$ et $n \geqslant 2$ alors $f(x) > 0$. **(1 Point)**

❀ En déduire que $x - 1 < \dfrac{x^n}{n}$ · **(0,5 Point)**

③ Soit $a > 1$, considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt[n]{a}$. Montrer, en utilisant la définition de la convergence et la question ②, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. **(1,5 Point)**

Solution 1

①

<u>Méthode 1 :</u>

$1 + X + X^2 + X^3 \ldots + X^{n-1}$ est la somme d'une série géométrique de 1er terme 1 et de raison X, sa somme est donc pour $X > 1$ donc $X \neq 1$, $\dfrac{X^n - 1}{X - 1}$.

<u>Méthode 2 :</u>

$$\begin{aligned}(X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1}) &= X(1 + X + X^2 + X^3 \ldots + X^{n-1}) - (1 + X + \cdots + X^{n-1}) \\ &= (X + X^2 + \cdots + X^{n-1} + X^n) - (1 + X + \cdots + X^{n-1}) = X^n - 1.\end{aligned}$$

②

❀
$$\begin{aligned} f(x) &= x^n - 1 - n(x-1) = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - n(x-1) \\ &= (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - n) \\ &= (x-1)\big((1-1) + (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^{n-1}-1)\big) \\ &= (x-1)\big((x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^{n-1}-1)\big).\end{aligned}$$

Comme $x > 1$, donc chaque parenthèse est strictement plus grande que 1.

$f(x)$ est donc strictement positive.

On a :

❀ $f(x) > 0 \Longleftrightarrow x^n - 1 - n(x-1) > 0 \Longrightarrow n(x-1) < x^n - 1 \Longrightarrow x - 1 < \dfrac{x^n - 1}{n} < \dfrac{x^n}{n}$.

③
$a > 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} - 1 > 0.$
Posons $x = u_n = \sqrt[n]{a}$, le résultat de la question précédente donne alors :

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{n} = \frac{a}{n}\cdot$$

De la définition d'une limite on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = 1 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N, |u_n - 1| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $u_n = \sqrt[n]{a}$, on a alors $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a}{n} \leqslant \varepsilon.$
Considérons alors : $\dfrac{a}{n} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow n \geqslant \dfrac{a}{\varepsilon}\cdot$
On prendra donc $N = \left[\dfrac{a}{\varepsilon}\right] + 1.$

Exercice 2.

Soit a, b deux nombres réels, $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b}, \quad u_0, v_0 \in \mathbb{R}; \quad u_0 < v_0.$$

① Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. **(1 Point)**
② Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. **(1+1 Points)**
③ En déduire la nature des suites (u_n) et (v_n). **(0,5+0,5 Point)**
④ Montrer que les deux suites ont une même limite ℓ. **(1 Point)**
Que peut-on en conclure ? **(0,5 Point)**
⑤ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n + v_n = u_0 + v_0$ **(1 Point)**.
En déduire la valeur de ℓ. **(0,5 Point)**

Solution 1
① : Raisonnons par récurrence, pour $n = 0, u_0 < v_0$; la proposition est donc vérifiée.
Supposons la proposition vraie jusqu'à n, c'est à dire $u_n \leqslant v_n$, on a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b} - \frac{au_n + bv_n}{a+b} = \frac{(b-a)(u_n - v_n)}{a+b} \leqslant 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \leqslant v_{n+1}.$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
Remarque : Il est facile de vérifier que l'inégalité précédente est stricte, $\forall\ n \in \mathbb{N},,\ u_n < v_n$.
② :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n &= \dfrac{bu_n + av_n}{a+b} - u_n = \dfrac{a(v_n - u_n)}{a+b} \geqslant 0 \Longrightarrow (u_n)\text{est croissante.} \\ v_{n+1} - v_n &= \dfrac{au_n + bv_n}{a+b} - v_n = \dfrac{a(u_n - v_n)}{a+b} \leqslant 0 \Longrightarrow (v_n)\text{est décroissante.} \end{cases}$$

③ :
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n < v_n \leqslant v_0$.

(u_n) croissante et majorée par (v_0), elle est convergente.
(v_n) décroissante et minorée par (u_0), elle est convergente.
④ :
Posons $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \ell_2$, par passage à la limite dans, par exemple : $u_{n+1} = \dfrac{bu_n + av_n}{a+b}$, on trouve $\ell_1 = \dfrac{b\ell_1 + a\ell_2}{a+b} \Longleftrightarrow a\ell_1 + b\ell_1 = b\ell_1 + a\ell_2 \Longleftrightarrow a\ell_1 = a\ell_2 \Longleftrightarrow \ell_1 = \ell_2 = \ell$.
On peut en conclure que les deux suites données sont adjacentes.
⑤ :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$u_n + v_n = \dfrac{bu_{n-1} + av_{n-1}}{a+b} + \dfrac{au_{n-1} + bv_{n-1}}{a+b} = \dfrac{(a+b)u_{n-1} + (a+b)v_{n-1}}{a+b} = u_{n-1} + v_{n-1}$.
D'où, en posant $t_n = u_n + v_n \Longrightarrow t_n = t_{n-1}$, la suite t_n est donc constante et elle vaut alors t_0. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = u_n + v_n = u_0 + v_0$.
Par passage à la limite dans cette dernière égalité, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell = u_0 + v_0 \Longleftrightarrow \ell = \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

Exercice 3.

Calculer les limites suivantes : **(1 Point)** pour chaque question.

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$, ② $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$,

③ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$, ④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos px}$.

$\mathscr{S}$olution 2

① $\mathfrak{A} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right)$
En passant au conjugué,

$$\mathfrak{A} = \underbrace{2\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}}_{=0} \times \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\cos\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right)}_{\text{fonction bornée}} = 0.$$

②

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} \\
&= \frac{x-a}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\
&= \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}} \quad \xrightarrow[x\longrightarrow a]{} \quad 0 + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2a}}{2a}.
\end{aligned}$$

Remarque : Si a est nul, la fonction donnée se réduit à $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, sa limite est donc $+\infty$.

③ Méthode 1 :

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow a} u(x)=1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow a} v(x)=\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(u(x))^{v(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\longrightarrow a}(u(x)-1)v(x)}$.

dans notre cas $u(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ et $v(x)=x$, on a alors,

$(u(x)-1)v(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}-1\right)x=\dfrac{-2x}{x+1} \underset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} -2$, finalement, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\mathrm{e}^{-2}$.

Méthode 2 :

A retenir, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} = \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k$.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \underset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-2}.$$

④

Méthode 1 :

$$\frac{1-\cos x}{1-\cos px} = \frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin^2(px/2)} = \frac{\sin^2(x/2)}{\sin^2(px/2)} = \left(\frac{\sin(x/2)}{\sin(px/2)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{x}{2}\right)^2 \times \left(\frac{px/2}{\sin(px/2)}\cdot\frac{2}{px}\right)^2 \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{p^2}.$$

Méthode 2 :

$$\frac{1-\cos x}{1-\cos px} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos px)}{(1+\cos x)(1-\cos px)(1+\cos px)} = \frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos px)}{(1+\cos x)(1-\cos^2 px)}$$

$$= \frac{1+\cos px}{1+\cos x}\times\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos^2 px} = \frac{1+\cos px}{1+\cos x}\times\frac{\sin^2 x}{\sin^2 px} = \frac{1+\cos px}{1+\cos x}\times\left(\frac{\sin x}{\sin px}\right)^2$$

$$= \frac{1+\cos px}{1+\cos x}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\left(\frac{px}{\sin px}\right)^2\times\left(\frac{1}{p}\right)^2 \underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{2}{2}\times 1^2\times 1^2\times\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Remarque : Pour $p=0$, la fonction donnée n'est pas définie.

Exercice 4.

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1 \\ x^2 + a & si \quad 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} + b & si \quad x > 4 \end{cases}$$

① Peut-on déterminer a et b pour que f soit continue dans $\mathbb{R}$? **(1+1 Points)**
② Montrer que f est monotone. **(0,5+0,5+0,5 Points)**
③ Donner l'expression de f^{-1}. **(0,5+0,5+0,5 Points)**

$\mathscr{S}$olution 3

① Les trois fonctions données $x, x^2 + a$ et $8\sqrt{x} + b$ sont continues dans l'intervalle où elles sont définies. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ il suffit qu'elle soit continue en $x = 1$ et en $x = 4$.
Pour $x = 1$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1-} x = 1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1+} f(x) = f(1) = 1 + a^2$, on doit avoir alors $1 = 1 + a^2 \Longleftrightarrow a = 0$.
Pour $x = 4$, on a $\lim\limits_{x \longrightarrow 4-} f(x) = f(4) = 16 + a^2$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 4+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 4+} (8\sqrt{4} + b) = 16 + b$, on doit avoir alors $16 + a^2 = 16 = 16 + b \Longleftrightarrow b = 0$, finalement :

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant 1 \\ x^2 & si \quad 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & si \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

② La monotonie.
$f(x) = x$ pour $x < 1$ est strictement croissante.

$f(x) = x^2$ si $1 \leqslant x \leqslant 4$. Soient m et n deux nombres réels tels que
$1 \leqslant m < n \leqslant 4 \Longrightarrow 1 \leqslant m^2 < n^2 \leqslant 16$, donc $f(m) < f(n)$.
La fonction est strictement croissante dans $[1, 4]$.

$f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$. Soient p et q deux nombres réels tels que
$p > q > 4 \Longrightarrow 8\sqrt{p} > 8\sqrt{q} > 16$, donc $f(p) > f(q)$.
La fonction est strictement croissante pour $x > 4$.
f étant **continue** et croissante sur les trois intervalles données, elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

③ La fonction inverse.
$f(x) = x$ pour $x < 1 \Longleftrightarrow f^{-1}(x) = x$ pour $x < 1$.
$f(x) = x^2 = y$ si $1 \leqslant x \leqslant 4 \Longrightarrow x = \sqrt{y}$ pour $1 \leqslant y \leqslant 16$.
$f(x) = 8\sqrt{x} = y$ si $x > 4 \Longrightarrow \sqrt{x} = y/8 \Longrightarrow x = y^2/64$ pour $y > 16$. En conclusion :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant 1 \\ \sqrt{x} & si \quad 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & si \quad x \geqslant 16. \end{cases}$$