Cycle $\mathbb{P}$réparatoire $\mathbb{I}$ntégré

$\mathcal{P}$remière année

$\mathcal{M}$odule : $\mathcal{A}$lgebre1

Examen N$^o$1

22 Novembre 2018

2heures

---

Commencer par les questions et les exercices qui vous paraissent simples.

Tous les documents sont interdits ainsi que les calculatrices et téléphones.

---

**Exercice 1** (5pts). Etant données $\mathcal{P}$ , $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions logiques, montrer que les propositions logiques $\Big[(\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big]$, $\Big[\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big]$ et $\Big[\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big]$ sont vraies.

**Exercice 2** (3pts). *Etant donnés deux ensembles $E$ et $F$,*

***1.*** *En utilisant les quantificateurs $\exists$ et $\forall$, écrire les assertions suivantes :* $\Big(E = \emptyset\Big)$ *et* $\Big(E \cap F \neq \emptyset\Big)$

***2.*** *Montrer que* $\Big((E \cap F = E \cup F) \Longleftrightarrow (E = F)\Big)$

**Exercice 3** (5pts). *Etant donnée $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :*

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\;\; f(x_1, x_2) = \big(x_1 + x_2, (x_1)^2 - (x_2)^2\big)$$

*$f$ est-elle injective, surjective ?*

***2.*** *Si on considère l'application $g : ]-\infty, 0] \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$, telle que :*

$$\forall\, x \in ]-\infty, 0[,\;\; g(x) = \frac{1}{3x^2 + 1}.$$

*Déterminer $F$ pour que $g$ soit bijective. Donner dans ce cas l'application réciproque $g^{-1}$.*

**Exercice 4** (3pts). *Etant donnée une relation binaire $\mathcal{R}$ **reflexive** sur un ensemble non vide $E$ et telle que :*

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad \Big((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\Big) \Longrightarrow (z\mathcal{R}x)$$

*Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.*

**Exercice 5** (3pts). ***I.*** *On considère sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R} \setminus \{-2, +2\}$ définie par :*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}, \quad (x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow \left(\frac{4 - x^2}{y^2 - 4} = -1\right).$$

*Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$.*
*Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}_{/\mathcal{R}}$.*

---

Bon Courage.

Cycle Préparatoire Intégré

$\mathcal{P}$remière année — $\mathcal{M}$odule : $\mathcal{A}$lgebre1

# Correction Examen N$^o$1

22 Novembre 2018

(2heures)

---

Commencer par les questions et les exercices qui vous paraissent simples.

Tous les documents sont interdits ainsi que les calculatrices et téléphones.

---

**Exercice 1** (5pts)**.** Etant données $\mathcal{P}$ , $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions logiques, montrer que les propositions logiques $\left[(\overline{P} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\right]$, $\left[\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}\right]$ et $\left[\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})\right]$ sont vraies.

**Correction.**

**Méthode 1.** En utilisant des tables de vérités, on a :

**I. (1pt.)**

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{P}$ | 0 | 1 |
| $\overline{\mathcal{P}}$ | 1 | 0 |
| $(\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P})$ | 0 | 1 |
| $\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big)$ | 1 | 1 |

ce qui montre que $\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big)$ est vraie.

**II. (2pts.)** Pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, on a :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\mathcal{Q}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\overline{\mathcal{P}}$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\overline{\mathcal{Q}}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $(\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $(\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $(\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

ce qui montre que $\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}$ est vraie.

**III. (2pts.)** Pour $\mathcal{P}$ , $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions logiques, on a :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{P}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\mathcal{Q}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\mathcal{R}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $(\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}))$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

ce qui montre que $\Big[\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big]$ est vraie.

**Méthode 2.** On peut aussi utiliser le fait que : $\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}}\Big)$. On a :

**Ib.**

$$\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big) \Longleftrightarrow \Big((\mathcal{P} \vee \overline{\overline{\mathcal{P}}}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big) \Longleftrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P})$$

et comme $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P})$ est une proposition vraie, on déduit que $\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{P}\Big)$ est aussi vraie.

**IIb.** On a :

$$\begin{aligned}
\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) &\Longleftrightarrow \Big((\mathcal{Q} \vee \overline{\overline{\mathcal{P}}}) \wedge (\overline{\mathcal{Q}} \vee \overline{\overline{\mathcal{P}}})\Big)\\
&\Longleftrightarrow \Big((\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) \wedge (\overline{\mathcal{Q}} \vee \mathcal{P})\Big)\\
&\Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) \wedge \overline{\mathcal{Q}}\Big] \vee \Big[(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) \wedge \mathcal{P}\Big]\\
&\Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \vee (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}})\Big] \vee \Big[(\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{P})\Big]\\
&\Longleftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}) \vee \mathcal{P} \qquad \text{car } (\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \text{ est fausse}\\
&\Longleftrightarrow \Big[\mathcal{P} \wedge (\overline{\mathcal{Q}} \vee \mathcal{Q})\Big] \vee \mathcal{P}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{P} \qquad \text{car } (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{Q}}) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

d'où on déduit que $\Big[\Big((\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\overline{\mathcal{P}} \Longrightarrow \overline{\mathcal{Q}})\Big) \Longrightarrow \mathcal{P}\ \Big]$ est vraie.

**IIIb.** Pour montrer que la proposition $\mathcal{S}$ : $\Big[\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big]$ est vraie, on montre que sa négation est fausse.
On a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{S}} &\Longleftrightarrow \Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \wedge \overline{(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})}\\
&\Longleftrightarrow \Big((\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}}\Big) \wedge (\mathcal{R} \vee \overline{\mathcal{Q}})\Big) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\\
&\Longleftrightarrow \Big(\Big[\mathcal{Q} \wedge (\mathcal{R} \vee \overline{\mathcal{Q}})\Big] \vee \Big[\overline{\mathcal{P}} \wedge (\mathcal{R} \vee \overline{\mathcal{Q}})\Big]\Big) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\\
&\Longleftrightarrow \Big(\Big[(\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{R}) \vee (\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}})\Big]\Big) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\\
&\Longleftrightarrow \Big((\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \vee (\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{R}) \vee (\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}})\Big) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}}) \qquad \text{car } (\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \text{ est fausse}\\
&\Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \wedge (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big]\\
&\Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\overline{\mathcal{Q}} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big]
\end{aligned}$$

comme les propositions $(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{P})$ et $(\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}})$ sont fausses, on déduit que

$$\Big[(\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{R} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \vee \Big[(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{P}) \wedge (\overline{\mathcal{Q}} \wedge \overline{\mathcal{R}})\Big] \qquad \text{est fausse}$$

donc $\overline{\mathcal{S}}$ est fausse, ce qui montre que

$$\Big[\Big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})\Big] \qquad \text{est } \textbf{VRAIE.}$$

$\square$

**Exercice 2** (3pts). *Etant donnés deux ensembles $E$ et $F$,*

***1.*** *En utilisant les quantificateurs $\exists$ et $\forall$, écrire les assertions suivantes : $\Big(E = \emptyset\Big)$ et $\Big(E \cap F \neq \emptyset\Big)$*

***2.*** *Montrer que $\Big((E \cap F = E \cup F) \Longleftrightarrow (E = F)\Big)$*

**Correction.**

**1. Utilisation des quantificateurs $\exists$ et $\forall$. (1.5 pts.)**

**1a.** $\Big(E = \emptyset\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, x,\ (x \notin E)\Big)$.

**1b.** $\Big(E \cap F \neq \emptyset\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists\, x;\ (x \in E) \wedge (x \in F)\Big)$.

**2. (1.5 pts.)** Montrer que $\Big((E \cap F = E \cup F) \Longleftrightarrow (E = F)\Big)$.

**2a.** $\Longrightarrow$.

Supposons que $\Big((E \cap F = E \cup F)$ et montrons que $(E = F)\Big)$. On a :

$$\Big(E \subset E \cup F = E \cap F \subset F\Big) \wedge \Big(F \subset E \cup F = E \cap F \subset E\Big)$$

ce qui montre que $E = F$.

**2b.** $\Longleftarrow$.

Inversement, si $E = F$ alors

$$E \cup F = E \cap F = E = F$$

De **2a.** et **2b.** on déduit que

$$\Big((E \cap F = E \cup F) \Longleftrightarrow (E = F)\Big).$$

$\square$

**Exercice 3** (5pts). *Etant donnée $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = \big(x_1 + x_2, (x_1)^2 - (x_2)^2\big)$$

*$f$ est-elle injective, surjective ?*

***2.*** *Si on considère l'application $g : ]-\infty, 0] \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$, telle que :*

$$\forall\, x \in ]-\infty, 0],\ g(x) = \frac{1}{3x^2 + 1}.$$

*Déterminer $F$ pour que $g$ soit bijective. Donner dans ce cas l'application réciproque $g^{-1}$.*

**Correction.**

**1a.** **(1pts.)** $f$ n'est pas injective, car pour $x_0 \neq 0$,

$$\Big(f(x_0,-x_0) = f(-x_0,x_0) = (0,0)\Big) \wedge \Big((x_0,-x_0) \neq (-x_0,x_0)\Big)$$

**1b.** **(1pts.)** $f$ n'est pas surjective, car pour $y = (0,1) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcll} \forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1,x_2) = (0,1) & \Longleftrightarrow & (x_1+x_2, (x_1)^2-(x_2)^2) = (0,1) & \\ & \Longleftrightarrow & (x_1+x_2 = 0) \wedge ((x_1)^2-(x_2)^2 = 1) & \\ & \Longleftrightarrow & (x_1 = -x_2) \wedge (0 = 1) & \text{absurde} \end{array}$$

donc

$$\exists\, y = (0,1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \Big(f(x_1,x_2) \neq (0,1)\Big)$$

ce qui montre que $f$ n'est pas surjective.

**2.** **(2pts + 1pt.)** Pour que $g$ soit bijective il faut que : $\forall\, y \in F,\ \exists! x \in ]-\infty,0];\ y = g(x)$. Soit $y \in F$, on résout l'équation $y = g(x)$. On a :

$$\begin{array}{rcll} y = g(x) & \Longleftrightarrow & y = \dfrac{1}{3x^2+1} & \\ & \Longleftrightarrow & 3yx^2 + y = 1 & \\ & \Longleftrightarrow & 3yx^2 = 1-y & \\ & \Longleftrightarrow & x^2 = \dfrac{1-y}{3y} & \text{si } y \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = \pm\sqrt{\dfrac{1-y}{3y}} & \text{si } \dfrac{1-y}{3y} \geq 0 \end{array}$$

En étudiant le signe de $\dfrac{1-y}{3y}$ on trouve que

$$\frac{1-y}{3y} \geq 0 \Longleftrightarrow y \in ]0,1]$$

par suite, pour $F = ]0,1]$ on a :

$$\forall\, y \in F,\ \exists\,!x = -\sqrt{\frac{1-y}{3y}} \in ]-\infty,0];\ y = g(x)$$

d'où on déduit que $g$ est bijective si $F = ]0,1]$ et on a :

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & ]0,1] & \longrightarrow & ]-\infty,0] \\ & y & \longrightarrow & -\sqrt{\dfrac{1-y}{3y}} \end{array}$$

$\square$

**Exercice 4** (3pts). *Etant donnée une relation binaire $\mathcal{R}$ **reflexive** sur un ensemble non vide $E$ et telle que :*

$$\forall\, x,y,z \in E, \quad \Big((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\Big) \Longrightarrow (z\mathcal{R}x)$$

*Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.*

**Correction.** $\mathcal{R}$ étant supposée reflexive, pour montrer qu'elle est d'équivalence on montre qu'elle est symétrique et transitive.

**a.** **(1.5pts.)** $\mathcal{R}$ **est Symétrique**, car : $\forall\, x, y \in E$,

$$\begin{array}{rcll} (x\mathcal{R}y) & \Longleftrightarrow & (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}y) & \text{car } \mathcal{R} \text{ est Reflexive} \\ & \Longleftrightarrow & y\mathcal{R}x & \text{d'après la deuxième propriété de } \mathcal{R} \end{array}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est **Symétrique**.

**b.** **(1.5pts.)** $\mathcal{R}$ **est Transitive**, car : $\forall\, x, y, z \in E$,

$$\begin{array}{rcll} \Big((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\Big) & \Longrightarrow & (z\mathcal{R}x) & \text{d'après la deuxième propriété de } \mathcal{R} \\ & \Longrightarrow & (x\mathcal{R}z) & \text{car } \mathcal{R} \text{ est symétrique} \end{array}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.
$\mathcal{R}$ étant reflexive, symétrique et transitive, on déduit qu'elle est une relation d'équivalence sur $E$.

$\square$

**Exercice 5** (3pts)**.** *On considère sur* $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$ *la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par :*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}, \quad (x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow \left(\frac{4 - x^2}{y^2 - 4} = -1\right).$$

***I.*** *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$.

***I.*** *Déterminer l'ensemble quotient* $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}_{/\mathcal{R}}$.

**Correction.**

**I.** **(2pts)** On remarque que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}, \quad (x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow \left(\frac{4 - x^2}{y^2 - 4} = -1\right) \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

donc, si on considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\},\ f(x) = x^2\Big)$, on voit que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}, \quad (x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow f(x) = f(x)$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$.

**II.** **(1pt)** Pour déterminer l'ensemble quotient, on détermine les classes d'équivalence. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$, alors $\dot{a} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\};\ x\mathcal{R}a\}$. Or :

$$x\mathcal{R}a \Longleftrightarrow x^2 = a^2 \Longleftrightarrow x = \pm a$$

et comme $a\mathcal{R}(-a)$, on déduit :

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}_{/\mathcal{R}} = \Big\{\{a, -a\};\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}\Big\} = \Big\{\{a, -a\};\ a \in [0, +\infty[\setminus\{2\}\Big\}$$

Bonne Continuation.