$\mathbb{E}$. $\mathbb{S}$. $\mathbb{I}$. **de $\mathcal{S}$idi-$\mathcal{B}$eℓ-$\mathcal{A}$bbès.**

$\mathcal{C}$ycle $\mathcal{P}$réparatoire $\mathcal{I}$ntégré

$\mathcal{P}$remière année **Module : Algebre1**

Examen N^{o}1

2015/16

Exercice 1. Etant données $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, donner les valeurs de vérité des propositions suivantes : $(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$, $(\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{Q})$ et $\big((\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \vee (\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{Q})\big)$. Cette dernière proposition logique est notée $P \oplus Q$.

Si $\mathcal{R}$ est une troisième proposition logique, montrer que

$$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$$

Réponse :

I.

$\mathcal{P}$	0	0	1	1
$\mathcal{Q}$	0	1	0	1
$\overline{\mathcal{P}}$	1	1	0	0
$\overline{\mathcal{Q}}$	1	0	1	0
$\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}$	0	0	1	0
$\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{Q}$	0	1	0	0
$(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \vee (\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$	0	1	1	0

II.

$\mathcal{P}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{Q}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{R}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R}$	0	1	1	0	1	0	0	1
$\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R}$	0	1	1	0	0	1	1	0
$\mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$	0	1	1	0	1	0	0	1

On voit que les propositions $(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc :

$$(\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R} \Longleftrightarrow \mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R})$$

Exercice 2. Soient E un ensemble non vide et A et B deux parties de E. On note

$$A\Delta B = \Big\{x \in E;\ \Big((x \in A) \wedge (x \notin B)\Big) \vee \Big(x \notin A) \wedge (x \in B)\Big)\Big\}$$

Montrer que : $\forall\, A,\ B,\ C \in \mathcal{P}(E),\quad (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

N.B. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.

Réponse :

Soit $x \in E$, alors :

$$x \in A\Delta B \Longleftrightarrow \Big((x \in A) \wedge (x \notin B)\Big) \vee \Big(x \notin A) \wedge (x \in B)\Big)$$

et
$$x \in B\triangle C \iff \Big((x \in B) \wedge (x \notin C)\Big) \vee \Big(x \notin B) \wedge (x \in C)\Big)$$

En notant :
$\mathcal{P}$: $(x \in A)$
$\mathcal{Q}$: $(x \in B)$
$\mathcal{R}$: $(x \in C)$
on voit que :
$$x \in A\Delta B \iff \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$$

donc
$$x \in (A\Delta B)\Delta C \iff (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R}$$

en utilisant la deuxième question de l'exercice 1, on déduit que :
$$\forall\, x \in E, \quad x \in (A\Delta B)\Delta C \iff (\mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \oplus (\mathcal{Q} \oplus \mathcal{R}) \iff x \in A\Delta(B\Delta C)$$

ce qui montre que :
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 3.
Soit f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{2x+3}{x+3} \end{array}$

Déterminer $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ pour que l'application f soit bijective.
Dans ce cas, donner l'application inverse f^{-1} de f.

Réponse :
I. On sait qu'une application $f : E \longrightarrow \mathbb{F}$ est bijective si :
$$\forall\, y \in F, \quad \exists!\, x \in E; \quad y = f(x)$$

Soit $y \in \mathbb{F}$, on résout alors l'équation $y = f(x)$.
On a :
$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{2x+3}{x+3} \\ &\iff \quad y(x+3) = 2x+3 \\ &\iff \quad yx - 2x = 3 - 3y \\ &\iff \quad x(y-2) = 3 - 3y \\ &\iff \quad x = \frac{3-3y}{y-2} \qquad si \quad y \neq 2 \end{aligned}$$

en prenant $\mathbb{F} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, on déduit que :
$$\forall\; y \in \mathbb{F},\; \exists!\; x = \frac{3-3y}{y-2}; \quad y = f(x)$$

et pour affirmer que f est bijective, il reste à vérifier si cette solution $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
On a :
$$x = -3 \iff \frac{3-3y}{y-2} = -3 \iff 3 - 3y = -3y + 6 \iff 3 = 6 \qquad impossible$$

donc $x \neq -3$, par suite :
$$\forall\; y \in \mathbb{F} = \mathbb{R}\setminus\{2\},\; \exists!\; x = \frac{3-3y}{y-2} \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}; \quad y = f(x)$$

ce qui montre que :
- l'application f est bijective
- l'application inverse est :

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-3\} \\ y & \longrightarrow & \dfrac{3-3y}{y-2} \end{array}$$

Exercice 4. *On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3y = y^3 - 2y^2 + 3x.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Déterminez la classe d'équivalence de $a = 0$ et déduire les classes d'équivalences de $b = -1$ et $c = 3$.

Réponse :

A. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

I. En posant $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, on remarque que

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

et on sait que les relations binaires ainsi définies sont des relations d'équivalence.

II. Pour ceux qui n'ont pas remarqué celà, pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on vérifie que :

i) $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme la relation " $=''$ est reflexive, alors

$$x^3 - 2x^2 + 3x = x^3 - 2x^2 + 3x$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x\mathcal{R}x$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est reflexive.

ii) $\mathcal{R}$ est Symétrique. De la même manière, comme l'égalité est une relation symétrique alors : $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3y = y^3 - 2y^2 + 3x \Longleftrightarrow y^3 - 2y^2 + 3x = x^3 - 2x^2 + 3y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x$$

ce qui montre que la relation $\mathcal{R}$ est Symétrique.

iii) $\mathcal{R}$ est Transitive. Soit $x,\ y,\ y \in \mathbb{R}$, l'égalité étant une relation transitive, alors

$$\begin{array}{rcl} (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) & \Longleftrightarrow & (x^3 - 2x^2 + 3y = y^3 - 2y^2 + 3x) \wedge (y^3 - 2y^2 + 3z = z^3 - 2z^2 + 3y) \\ & \Longleftrightarrow & (x^3 - 2x^2 - 3x = y^3 - 2y^2 - 3y) \wedge (y^3 - 2y^2 - 3y = z^3 - 2z^2 - 3z) \\ & \Longrightarrow & (x^3 - 2x^2 - 3x = z^3 - 2z^2 - 3z) \\ & \Longrightarrow & (x^3 - 2x^2 + 3z = z^3 - 2z^2 + 3x) \\ & \Longrightarrow & x\mathcal{R}z \end{array}$$

ce qui montre que la relation $\mathcal{R}$ est Transitive.

De **i)**, **ii)** et **iii)** on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}$.

B. La classe d'équivalence de $x_0 = 0$.

On sait que : $\dot{x_0} = \{x \in \mathbb{R}; \quad x\mathcal{R}x_0\}$, donc

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}0 \Longleftrightarrow x^3 - 2x^2 = 3x &\Longleftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x = 0) \vee (x^2 - 2x - 3 = 0) \end{aligned}$$

Il est clair que $x = -1$ est une racine de l'équation du second ordre et la division par $(x + 1)$ nous donne

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

d'où on déduit que

$$x\mathcal{R}0 \Longleftrightarrow (x = 0) \vee (x = -1) \vee (x = 3)$$

par suite

$$\dot{0} = \{0, -1, 3\}$$

Les classes d'équivalence de -1 et 3. On sait que si $x_1 \in \dot{x_0}$, alors $\dot{x_1} = \dot{x_0}$, donc :

$$\dot{\overline{-1}} = \dot{0} = \dot{3} = \{0, -1, 3\}$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation binaire $\preceq$ par :

$$\forall\, X = (x, y),\ Y = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \qquad X \preceq Y \Longleftrightarrow (x \leq x') \wedge (y' \leq y)$$

Vérifier que $\preceq$ est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Soit $\mathcal{A} = \{(2, 1), (1, 3), (4, 1), (6, 0)\}$, donner le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble $\mathcal{A}$, s'ils existent, par rapport à la relation d'ordre $\preceq$.

Réponse :

A. $\preceq$ Relation d'ordre.

i) $\preceq$ Est reflexive, car $\leq$ étant une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, donc reflexive, alors :

$$\forall\, X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq x) \wedge (y \leq y)$$

donc

$$\forall\, X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \preceq (x, y)$$

ce qui montre que $\preceq$ est reflexive.

ii) $\preceq$ est Transitive, car $\leq$ étant une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, donc Transitive, alors : $\forall\, X = (x, y),\ Y = (x', y'),\ Z = (x", y") \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (X \preceq Y) \wedge (Y \preceq Z) &\Longleftrightarrow \Big((x \leq x') \wedge (y' \leq y)\Big) \wedge \Big((x' \leq x") \wedge (y" \leq y')\Big) \\ &\Longleftrightarrow \Big((x \leq x') \wedge (x' \leq x")\Big) \wedge \Big((y" \leq y') \wedge (y' \leq y)\Big) \\ &\Longrightarrow (x \leq x") \wedge (y" \leq y), \qquad \textit{car } \leq \textit{ est transitive dans } \mathbb{R}. \\ &\Longrightarrow (x, y) \leq (x", y") \\ &\Longrightarrow X \preceq Z \end{aligned}$$

ce qui montre que la relation $\preceq$ est transitive.

iii) $\preceq$ **est Anti-Symétrique,** car $\leq$ étant une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, donc Anti-Symétrique, alors : $\forall\, X=(x,y),\ Y=(x',y')\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(X\preceq Y)\wedge(Y\preceq X) &\iff \Big((x\leq x')\wedge(y'\leq y)\Big)\wedge\Big((x'\leq x)\wedge(y\leq y')\Big)\\
&\iff \Big((x\leq x')\wedge(x'\leq x)\Big)\wedge\Big((y'\leq y)\wedge(y\leq y')\Big)\\
&\Longrightarrow (x=x')\wedge(y=y'),\ \text{car} \leq \text{est Anti-Symétrique dans } \mathbb{R}.\\
&\Longrightarrow (x,y)=(x',y')\\
&\Longrightarrow X=Y
\end{aligned}$$

De **i)**, **ii)** et **iii)**, on déduit que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

B. L'ordre est partiel, car si on prend $X=(1,2)$ et $Y=(3,4)$, alors X et Y ne sont pas comparables, car :

$$\begin{array}{ll}
X\preceq Y \iff (1,2)\preceq(3,4)\iff(1\leq 3)\wedge(4\leq 2)\Longrightarrow 4\leq 2 & \textit{Impossible}\\
Y\preceq X \iff (3,4)\preceq(1,2)\iff(3\leq 1)\wedge(2\leq 4)\Longrightarrow 3\leq 1 & \textit{Impossible}
\end{array}$$

ce qui montre que X et Y ne sont pas comparables, donc $\preceq$ est une relation d'ordre partiel.

Le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{A}=\{(2,1),(1,3),(4,1),(6,0)\}$.
On voit que :

$$(1,3)\preceq(2,1)\preceq(4,1)\preceq(6,0)$$

Donc $\mathfrak{m}=(1,3)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{M}=(6,0)$ est son plus grand élément, par rapport à la relation d'ordre $\preceq$.

Bonne Continuité.