$\mathcal{E}$. N. S. I. de $\mathcal{S}$idi-$\mathcal{B}$eℓ-$\mathcal{A}$bbès.
$\mathcal{C}$ycle $\mathcal{P}$réparatoire $\mathcal{I}$ntégré

$\mathcal{P}$remière année — Module : Algebre1

$\mathcal{R}$esponsables du module : $\mathcal{A}$. E. K. $\mathcal{G}$heriballah, $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$echab .

Examen N°1
2014/15

Exercice 1. Etant données $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, donner dans un tableau les valeurs de vérité des propositions suivantes : $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{Q}$, $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q}$, $(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$, $(\overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$, $\overline{(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})}$. Préciser celles qui seraient équivalentes.

Donner la négation et la contrapposée de la proposition suivante :

$$\forall x \Big((\exists y,\ P) \Longrightarrow (\forall z,\ Q) \Big).$$

Réponse :

$\mathcal{P}$	0	0	1	1	
$\mathcal{Q}$	0	1	0	1	**i)**
$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	0	1	1	1	
$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$	0	0	0	1	
$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{Q}$	0	1	0	1	**i)**
$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q}$	0	1	0	1	**i)**
$\overline{\mathcal{P}}$	1	1	0	0	
$\overline{\mathcal{Q}}$	1	0	1	0	
$(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$	0	0	1	0	**ii)**
$(\overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q})$	1	1	0	1	**iii)**
$(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$	1	1	0	1	**iii)**
$\overline{(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})}$	0	0	1	0	**ii)**

De ce tableau on déduit que :

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{Q} \Longleftrightarrow (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{Q} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$$

$$(\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \Longleftrightarrow \overline{(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})}$$

$$(\overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$$

La négation.

$$\begin{aligned}
\overline{\left[\forall x \Big((\exists y,\ \mathcal{P}) \Longrightarrow (\forall z,\ \mathcal{Q}) \Big)\right]} &\Longleftrightarrow \left[\exists x \overline{\Big((\exists y,\ \mathcal{P}) \Longrightarrow (\forall z,\ \mathcal{Q}) \Big)}\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\exists x \Big((\exists y,\ \mathcal{P}) \wedge \overline{(\forall z,\ \mathcal{Q})} \Big)\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\exists x \Big((\exists y,\ \mathcal{P}) \wedge (\exists z,\ \overline{\mathcal{Q}}) \Big)\right]
\end{aligned}$$

La contrapposée

$$\begin{aligned}
\left[\forall x \Big((\exists y,\ \mathcal{P}) \Longrightarrow (\forall z,\ \mathcal{Q}) \Big)\right] &\Longleftrightarrow \left[\forall x \Big(\overline{(\forall z,\ \mathcal{Q})} \Longrightarrow \overline{(\exists y,\ \mathcal{P})} \Big)\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\forall x \Big((\exists z,\ \overline{\mathcal{Q}}) \Longrightarrow (\forall y,\ \overline{\mathcal{P}}) \Big)\right]
\end{aligned}$$

$\diamond$

Exercice 2. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$, montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Réponse : Soit $x \in E$, alors :

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(\, f(A)\,)$$

ce qui montre que : $A \subset f^{-1}(\, f(A)\,)$.

$\diamond$

Exercice 3. *Soit* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2+1 \end{array}$, h est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Réponse :
I. h n'est pas injective, car : Pour $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$ dans $E = \mathbb{R}$, on a :

$$\Big((x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))\Big)$$

II. h n'est pas surjective, car : $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1 \geq 1\Big)$ donc $\Big($ Tout $y < 1$ n'a pas d'antécédent par $h\Big)$.
III. h n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ni surjective).

$\diamond$

Exercice 4. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{5\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{2x+3}{x-5} \end{array}$
f est-elle bijective ? Si oui, donner f^{-1}.

On considère l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x-5 \end{array}$.
Donner $f \circ g$ et $g \circ f$ si elles existent.

Réponse.
f **bijective ?** Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, alors on résout l'équation $y = f(x)$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2x+3}{x-5} \iff y(x-5) = 2x+3 \\ &\iff yx - 2x = 3 + 5y \iff x(y-2) = 3+5y \\ &\iff x = \frac{3+5y}{y-2}, \qquad \textit{car } y \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \end{aligned}$$

ainsi : $\forall\, y \in \mathbb{R}\{2\},\ \exists\,!x = \dfrac{3+5y}{y-2};\ y = f(x).$
Reste à vérifier si $x \in E = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. On a :

$$\begin{aligned} x = 5 &\iff \frac{3+5y}{y-2} = 5 \iff 3 + 5y = 5(y-2) \\ &\iff 3 + 5y = 5y - 10 \iff 3 = -10 \quad \textit{impossible} \end{aligned}$$

donc $x \neq 5$ et par suite :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\{2\},\ \exists\,!x = \frac{3+5y}{y-2} \in \mathbb{R}\setminus\{5\};\ y = f(x)$$

ce qui montre que f **est bijective** et que :

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{5\} \\ & y & \longrightarrow & \dfrac{3+5y}{y-2} \end{array}$$

Composition. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{5\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ & x & \longrightarrow & \dfrac{2x+3}{x-5} \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & 2x-5 \end{array}.$$

alors $g\circ f : \mathbb{R}\setminus\{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec : $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{5\}$,

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = 2\frac{2x+3}{x-5} - 5 = \frac{4x+6-5x+25}{x-5} = \frac{31-x}{x-5}$$

donc :

$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & \mathbb{R}\setminus\{5\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \dfrac{31-x}{x-5} \end{array}$$

Par contre[1], si $f\circ g$ était définie, alors $f\circ g : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et on aurait :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, \qquad \Big(f\circ g(x)\ \text{ défini }\Big) \Longrightarrow \Big(g(x) \in \mathbb{R}\setminus\{5\}\Big)$$

or :

$$g(x) = 5 \Longleftrightarrow 2x-5 = 5 \Longleftrightarrow 2x = 10 \Longleftrightarrow x = 5$$

donc pour $x = 5 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $g(x) \notin \mathbb{R}\setminus\{5\}$ et $f\circ g(x) = f(g(x))$ n'est pas défini, ce qui montre que $f\circ g$ n'est pas définie.

Remarque : *Pour certains auteurs, $f\circ g$ n'est pas définie car l'ensemble d'arrivée de g n'est pas inclus dans (ou n'est pas égal à) l'ensemble de départ de f.*

$\diamond$

Exercice 5. *On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^3 - y^2 = y^3 - x^2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Déterminez les classes d'équivalence de $a = 1$ et de $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : H \longrightarrow G$, alors $f\circ g$ est définie si $g(H) \subset E$. On a alors $f\circ g : H \longrightarrow F$ et $\Big(\forall\, x \in H,\ f\circ g(x) = f(g(x))\Big)$

Réponse.
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

a) **$\mathcal{R}$ est réflexive.** Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^3 - x^2 = x^3 - x^2$ donc : $x\mathcal{R}x$, par suite

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}x$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

b) **$\mathcal{R}$ est symétrique.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcll} (x\mathcal{R}y) & \Longleftrightarrow & (x^3 - y^2 = y^3 - x^2) & \\ & \Longleftrightarrow & (y^3 - x^2 = x^3 - y^2) & \quad \text{car “=” est symétrique} \\ & \Longleftrightarrow & y\mathcal{R}x & \end{array}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique.

c) **$\mathcal{R}$ est transitive.** Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) & \Longleftrightarrow & \begin{cases} x^3 - y^2 = y^3 - x^2 & \ldots (1) \\ y^3 - z^2 = z^3 - y^2 & \ldots (2) \end{cases} \\ & \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} & x^3 - z^2 = z^3 - x^2 \\ & \Longrightarrow & x\mathcal{R}z \end{array}$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.
De **a)**, **b)** et **c)** on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence. Pour $a \in \mathbb{R}$, sa classe d'équivalence est

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R};\ x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R};\ x^3 - a^2 = a^3 - x^2\}.$$

Donc, pour déterminer la classe de a on résout l'équation : $x^3 - a^2 = a^3 - x^2$.
On a :

$$\begin{array}{rcl} x^3 - a^2 = a^3 - x^2 & \Longleftrightarrow & x^3 + x^2 - (a^3 + a^2) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x - a)(x^2 + (1 + a)x + (1 + a)a) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x = a) \vee (x^2 + (1 + a)x + (1 + a)a = 0) \end{array}$$

On résout l'équation algébrique du second ordre : $(\star) \ldots\ldots \Big(x^2 + (1+a)x + (1+a)a = 0\Big)$.
Son discriminant est $\Delta = (1 + a)^2 - 4a(1 + a)$, donc :

i) Pour $a = 1$, $\Delta < 0$ donc l'équation $(\star)$ n'a pas de racine et $\dot{1} = \{1\}$.

ii) Pour $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$, $\Delta = 1 + a^2 + 2a - 4a - 4a^2 = 1 - 2a - 3a^2 < 0$ donc l'équation $(\star)$ n'a pas de racine et $\dot{\overline{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}} = \left\{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

◇