E.S.I / 1CPI 25 Janvier 2015 Examen semestriel ANA1 Durée : 2H

Exercice 1 (4 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie non vide et bornée.

On pose $B = \{|x-y|;\ (x,y) \in A^2\}$. Montrer que $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice 2 (3 points)

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que si f est telle que $(f(x))^2 = 1$ pour tout $x \in I$, alors f est constante.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction définie par: $f(x) = \sqrt{1+\sin^2(x)}$

1/ Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$

2/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $]0, \sqrt{2}[$.

(on ne demande pas de calculer la solution).

3/ Etudier la nature de la suite numérique réelle donnée par

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Exercice 4 (4 points)

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{2}{(n+1)^3} \leq f(n) - f(n+1) \leq \frac{2}{n^3}$$

2/ Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

3/ Quelle est la nature de $(S_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 5 (3 points)

Soit $g(x) = \exp(x) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

1/ Donner la formule de Taylor-Lagrange de g à l'ordre 3 au point $x = 0$.

2/ Etudier le signe de $g(x) - g(0)$ au voisinage de 0. Conclure.