E.S.I. 19 Janvier 2016 Examen semestriel ALG1 1CPI Durée : 2H

L'usage da la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B.

1- Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

2- Les réponses doivent être justifiées.

3- Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (4 pts)

On définit sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ la relation binaire S suivante:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ aSb \iff a^3 - b^3 = 3(a-b).$$

1- Montrer que S est une relation d'équivalence.

2- Déterminer suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence $\overline{a}$ et son cardinal.

Exercice 2 : (3 pts)

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1).$$

1- La loi $*$ est-elle commutative?

2- Vérifier que $\mathbb{R}$ possède un élément neutre pour la loi $*$.

3- Calculer $(2*2)*3$ et $2*(2*3)$. Déduire.

4- Calculer le(s) symétrique(s) de l'élément 2 pour la loi $*$.

Problème : (13 pts = 7 pts + 6 pts) Les parties I/ et II/ sont indépendantes

I/ Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1- En utilisant le binôme de Newton, préciser le degré du polynôme P.

2- Trouver deux racines réelles évidentes de P.

3- Montrer que j est une racine de P et donner son ordre de multiplicité (on rappelle que l'on note par j la racine du polynôme X^2+X+1 de partie imaginaire strictement positive.).

4- Décomposer P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

II/ On considère le groupe $(\mathbb{R}[X], +)$ et soit l'application $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] : \ \phi(P) = (2X-1)P - (X^2 + \frac{1}{2})P',$$

où P' désigne le polynôme dérivé.

1- Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.

2- Si on écrit $P = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré n où $n \in \mathbb{N}$, donner le coefficient dominant de $\phi(P)$.

3- Déterminer le degré de $\phi(P)$ en fonction du degré de P, pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

4- Montrer que $\phi(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. Déduire $\ker \phi$.

5- Déduire des questions précédentes si l'application ϕ est injective? surjective?