

## Exercice 1

Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1 - Ecrire un développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- 2 - Donner l'équation de la tangente en  $x_0 = 0$ , puis la position de la courbe par rapport à cette tangente.
- 3 - Calculer  $f'(0)$  et  $f''(0)$  si elle existe.
- 4 - Soit  $g(x) = \frac{1}{\sin x}$ .  
Ecrire un développement limité généralisé de  $g$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.

## Exercice 2

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2}-1)}{(\sin^3 x)(1-\cos x)}$

2- Soit  $f(x) = |x| + x^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\forall x \neq 0$ .

i)  $f$  admet-elle un d.l. 2 au voisinage de 0 ?

ii) Calculer  $(f(x))^2$ , en déduire un d.l. 3 de  $(f(x))^2$  au voisinage de 0.

iii) Soit  $g$  une fonction définie au voisinage de 0. Que peut-on dire de l'implication suivante :

$g$  n'admet pas de d.l. 2 au  $V(0) \Rightarrow (g(x))^2$  n'admet pas de d.l. 2 au  $V(0)$ .

Barème : exo1 : 12pts = 3 + 3 + 3 + 3, exo2 : 8pts = 2 + 2 + 3 + 1.

Bon courage

$$x = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$P \Rightarrow Q$$

$$Q \Rightarrow P$$

$$\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$