Exercice 1 (3.5 pts)

Soient les deux matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3 \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -3\alpha & 6\alpha \\ 6\alpha & -8\alpha+\beta & 12\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

La solution du système obtenu est $\alpha = -1$ et $\beta = 2$, i.e., $A^2 = -A + 2I_3$.

2. En déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}.

On a $A^2 = -A + 2I_3 \iff \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3$, on en déduit que

$$A\Big[\frac{1}{2}(A+I_3)\Big] = I_3 \quad \text{et} \quad \Big[\frac{1}{2}(A+I_3)\Big]A = I_3,$$

d'où A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 3 & \frac{-7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : (4.5 pts)

On considère le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}_4[X]$. On pose $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(2) = P(3) = 0\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e.v..
   (a) Il est clair que $0 \in E$.
   (b) Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :
   $(\alpha P_1 + P_2)(2) = \alpha P_1(2) + P_2(2) = 0$ et $(\alpha P_1 + P_2)(3) = \alpha P_1(3) + P_2(3) = 0$.

   On en déduit que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}_4[X]$, et donc E est un $\mathbb{R}$-e.v..

2. Donner une base de E.

Soit $P \in E$, donc il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} P &= (X-2)(X-3)(\alpha + \beta X + \gamma X^2) \\ &= \alpha(X-2)(X-3) + \beta X(X-2)(X-3) + \gamma X^2(X-2)(X-3). \end{aligned}$$

Les polynômes $P_2 = (X-2)(X-3)$, $P_3 = X(X-2)(X-3)$ et $P_4 = X^2(X-2)(X-3)$ appartiennent à E et donc la famille (P_2, P_3, P_4) engendre E, et comme ils sont de degrés deux à deux distincts, c'est une base de E et $\dim E = 3$.

3. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_4[X]$.

On a $\dim E = 3$ et $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$. On peut prendre pour supplémentaire l'espace $< P_0 = 1, P_1 = X >$.

Exercice 3 : (7.5 pts)

Soient (u_1, u_2, u_3) une base quelconque de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(u_1) = -\sqrt{2}u_1 + u_3, \quad f(u_2) = \sqrt{2}u_2 + u_3, \quad f(u_3) = u_1 + u_2$.

1. Soit $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f(v)$ dans la base (u_1, u_2, u_3).
   L'image par f d'un vecteur $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ est le vecteur

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \alpha_3 f(u_3) \\ &= (-\sqrt{2}\alpha_1 + \alpha_3)u_1 + (\sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3)u_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)u_3. \end{aligned}$$

2. Déterminer une base de $\ker f$.
   Soit $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$v \in \ker f \iff \begin{cases} -\sqrt{2}\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

   On en déduit que $\ker f =< u_1 - u_2 + \sqrt{2}u_3 >$ et $\dim_{\mathbb{R}} \ker f = 1$.

3. Soient F et G les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 2v\} \quad \text{et} \quad G = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = -2v\}.$$

   Déterminer une base de F et une base de G.
   Soit $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \in \mathbb{R}^3$.

$$v \in F \iff \begin{cases} -\sqrt{2}\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_1 \\ \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

   On en déduit que $F =< w = (\sqrt{2} - 1)u_1 + (\sqrt{2} + 1)u_2 + \sqrt{2}u_3 >$ et $\dim_{\mathbb{R}} F = 1$.

$$v \in G \iff \begin{cases} -\sqrt{2}\alpha_1 + \alpha_3 = -2\alpha_1 \\ \sqrt{2}\alpha_2 + \alpha_3 = -2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

   On en déduit que $G =< w' = (\sqrt{2} + 1)u_1 + (\sqrt{2} - 1)u_2 - \sqrt{2}u_3 >$ et $\dim_{\mathbb{R}} G = 1$.

4. Démontrer :
   (a) $Imf = F \oplus G$.
   On a $w = f(\frac{w}{2})$ et $w' = f(-\frac{w'}{2})$, donc w et w' appartiennent à Imf. Il en résulte

$$F \subset Imf \quad \text{et} \quad G \subset Imf \tag{1}$$

   On a de plus

$$v \in F \cap G \Longrightarrow f(v) = 2v = -2v \Longrightarrow v = 0.$$

   Donc

$$F \cap G = (0) \tag{2}$$

   Le Théorème du rang nous donne

$$\dim_{\mathbb{R}} Imf = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} \ker f = 3 - 1 = 2.$$

   On en déduit que

$$\dim_{\mathbb{R}} Imf = \dim_{\mathbb{R}} F + \dim_{\mathbb{R}} G \tag{3}$$

   De (1),(2) et (3) on obtient

$$Imf = F \oplus G.$$

(b) $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$.
Soit $v \in Imf \cap \ker f$. Puisque $v \in Imf$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha w + \beta w',$$

et puisque $v \in \ker f$, alors

$$f(v) = 0 \Longrightarrow \alpha f(w) + \beta f(w') = 0 \Longrightarrow 2\alpha w - 2\beta w' = 0 \Longrightarrow \alpha w - \beta w' = 0.$$

On en déduit que $\alpha = \beta = 0$ et donc

$$Imf \cap \ker f = (0) \tag{4}$$

On a aussi

$$\dim_{\mathbb{R}} Imf + \dim_{\mathbb{R}} \ker f = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \tag{5}$$

De (4) et (5) on obtient

$$\mathbb{R}^3 = Imf \oplus \ker f.$$

Exercice 4 (4.5 pts)
Décomposer en éléments simples de $\mathbb{R}(X)$, la fraction :

$$F(X) = \frac{2X^6 + 5X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 4X^2 + 7X + 1}{(X+2)(X^4 + X^2 + 1)}.$$

Les racines complexes de $X^4 + X^2 + 1$ sont $j, j^2, -j, -j^2$, on en déduit

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

La décomposition à priori de F est

$$F = E + \frac{a}{X+2} + \frac{bX + c}{X^2 + X + 1} + \frac{dX + e}{X^2 - X + 1}.$$

Le dénominateur de F est le polynôme

$$Q = X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 2.$$

La division euclidienne de

$$P = 2X^6 + 5X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 4X^2 + 7X + 1$$

par Q donne

$$P = (2X + 1)Q - X^4 + 2X - 1.$$

La partie entière de F est donc $E = 2X + 1$.
Posons

$$G = F - E = \frac{-X^4 + 2X - 1}{(X+2)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)}.$$

$a = (X + 2)G|_{x=-2} = -1$.
$bj + c = (X^2 + X + 1)G|_{x=j} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow b = 0$ et $c = -\frac{1}{2}$.
$dj + e = (X^2 - X + 1)G|_{x=-j} = \frac{1}{2} \Longrightarrow d = 0$ et $e = \frac{1}{2}$.
On déduit que

$$F = 2X + 1 - \frac{1}{X+2} - \frac{\frac{1}{2}}{X^2 + X + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{X^2 - X + 1}.$$