E.S.I. 13-06-2013 1CPI **Examen Semestriel** **ALG 2** Durée : **2H**

N.B : Le barême est approximatif :

(Exo1 : 7pts, Exo2 : 5pts, Exo3 : 5pts, Exo4 : 3pts)

Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 :

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $e_1' = e_1, e_2' = e_1 + 2e_2$ et $e_3' = 2e_2 + 3e_3$.

1- Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.

2- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(e_1) = e_1'$, $f(e_2) = e_2'$, $f(e_3) = e_3'$.

a- Montrer que f est bijectif.

b- Calculer $f(x, y, z)$, pour (x, y, z) élément de $\mathbb{R}^3$.

c- Soient $u_1 = e_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0)$. Exprimer $f(u_1)$ et $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.

d- Déterminer un vecteur non nul u_3 tel que $f(u_3) = 3u_3$.

e- Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3- On pose $g = f - 3Id$; Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$.

a- Déterminer une base de $\operatorname{Im} g$.

b- En déduire les dimensions de $\operatorname{Im} g$ et $\ker g$ ainsi qu'une base de $\ker g$.

Exercice 2 : (Les deux parties sont indépendantes)

Partie I : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1- Calculer A^2. En déduire la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2- Exprimer B comme combinaison linéaire des matrices A et I_2.

3- En déduire la matrice B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II : Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$:

Montrer que : A et B commutent si et seulement si $(A - \alpha I_n)$ et $(B - \alpha I_n)$ commutent.

Exercice 3 :

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $u(aX^2 + bX + c) = a + b\sqrt{2}$.

1- Montrer que le polynôme $P_1 = 1$ appartient à $\ker u$.

2- Déterminer un polynôme P_2 appartenant à $\ker u$ tel que (P_1, P_2) forme une base de $\ker u$.

3- Déterminer un polynôme P_3 de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et tel que : $u(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3) = a_3$.

4- Déterminer $\operatorname{Im} u$ puis déterminer $\dim \operatorname{Im} u$ de deux manières différentes.

Exercice 4 : Soient $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, E , F et G trois $\mathbb{K}$-e.v. et soit $f \in L(F, G)$. On va définir à partir de f une application Φ_f de $L(E, F)$ dans $L(E, G)$ en posant : $\forall u \in L(E, F), \Phi_f(u) = fou$.

1- Montrer que Φ_f est une application linéaire.

2- On suppose que f est injective. L'application Φ_f est-elle injective?