ESI - 1CPI A - B **07 JUIN 2012**

Examen d'ALG2 (Durée : 2h)

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit

N.B. : Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice n°1 :(**7pts**)

On considère les applications linéaires (f , IR^3 , IR^2) et (g , IR^2, IR^3) définies par :

f(x, y, z) = (-x + y + z , x – y + z) et **g(x, y) = (y , x , x + y)**

a) Déterminer **Ker f** , **Im f**, **Ker g** , **Im g** et préciser leurs dimensions.

b) Les applications f et g sont- elles injectives ? surjectives ?

c) Déterminer les applications fog et gof.

d) Montrer que $\forall\alpha \in$ IR , $\forall u \in L(IR^3, IR^2)$, $\forall v \in L(\mathrm{IR}^2, IR^3)$:

$$\boldsymbol{\alpha}.(\mathbf{u\ o\ v}) = (\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{u})\boldsymbol{ov}$$

e)Existe-t-il une application linéaire (h , IR^3, IR^2) telle que hog = Id_{IR^2} ?

Exercice n°2 :(5pts)

I- Soit la matrice **M** = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a^2} \\ \mathbf{1/\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1/\boldsymbol{a^2}} & \mathbf{1/\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ où $a \in IR^*$.

Calculer $\mathbf{M^2 - M}$ puis en déduire que M est inversible et donner $\mathbf{M^{-1}}$

II – Soit $n \in IN^*$.

a) Dans $\mathbf{M_n(IR)}$: Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

b) Peut on choisir deux matrices triangulaires inférieures de l'e.v $\mathbf{M_n(IR)}$ pour obtenir un nombre minimal d'éléments nuls dans leur matrice produit ?si oui, dites comment ?et quel est ce nombre ?

<u>Exercice n°3</u> : (4pts)

Soient E , F , G des K-e.v. de dimensions finies , f ∈ *L(E,F) et g* ∈ *L(F,G)*

a) Montrer que :

$$\textbf{Im(f) = Ker(g)} \iff \begin{cases} \boldsymbol{gof = 0} \\ \boldsymbol{et} \\ \boldsymbol{rg(f) + rg(g) = \dim(F)} \end{cases}.$$

b) Que peut- on dire si f et g sont bijectives ?

<u>Exercice n°4</u> : (4pts)

Soient F et G les sous ensembles de IK^{IN} définis par :

F = $\{(\boldsymbol{u_n}) \in \boldsymbol{IK^{IN}}, \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{IN}: \boldsymbol{U_{2n+1} = U_{2n}}\}$ **et G =** $\{(\boldsymbol{u_n}) \in \boldsymbol{IK^{IN}}, \forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{IN} : \boldsymbol{U_{2n+1} = 0}\}$

a) Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels du IK-e.v. IK^{IN}.

b) Montrer que F et G sont supplémentaires de IK^{IN}.