Exercice 1 : (3.5 pts)
Soit l'application linéaire suivante :

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto f(x,y,z) = (x+y-z, y+z) \end{array}$$

1/ Déterminer une base de $\ker f$. f est-elle injective?.
2/ Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. f est-elle surjective?.

Solution :
1/ On a : $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(x,y,z) = (0,0)\}$. Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$f(x,y,z) = (0,0) \Leftrightarrow (x+y-z, y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{cases}$$

On trouve : $z = -y$ et $x = -y + z = -2y$, d'où:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(-2y, y, -y) \text{ tel que } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,-1) \text{ tel que } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

Si on pose : $w = (-2,1,-1)$, alors on vérifie que $w \in \ker f$, de plus on vient de montrer que (w) est génératrice de $\ker f$, et comme $w \neq 0$ donc (w) est libre. Enfin (w) est une base de $\ker f$. **(1.25 pt)**

Remarque : toute famille (αw), tel que $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est une base de $\ker f$.

Comme $\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. **(0.5 pt)**

2/ On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{ f(x,y,z) \text{ tel que } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ (x+y-z, y+z) \text{ tel que } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{x(1,0) + y(1,1) + z(-1,1) \text{ tel que } x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle w_1 = (1,0), w_2 = (1,1), w_3(-1,1) \rangle \end{aligned}$$

Donc la famille $F = (w_1 = (1,0), w_2 = (1,1), w_3(-1,1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Comme la famille F est de cardinal 3 et la dimension de $\mathbb{R}^2$ est égale à 2 donc la famille F est liée. On pourra vérifier que, par exemple, w_1 et w_2 sont linéairement indépendants, donc (w_1, w_2) forme une base de $\operatorname{Im} f$. **(1.25 pt)**

Comme $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, d'où f est surjective. **(0.5 pt)**

Exercice 2 : (4 pts)
On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ la famille $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ des polynômes:

$$\begin{aligned} P_1 &= (X+1)^4, P_2 = (X-1)(X+1)^3, P_3 = (X-1)^2(X+1)^2, \\ P_4 &= (X-1)^3(X+1) \text{ et } P_5 = (X-1)^4. \end{aligned}$$

1/ Exprimer chacun des polynômes de la famille $\mathcal{P}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
2/ La famille $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_4[X]$?

Solution :
1/ Soit $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, en développant les polynômes de la famille $\mathcal{P}$, on trouve :

$$\begin{aligned} P_1 &= (X+1)^4 = 1 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4, \\ P_2 &= (X-1)(X+1)^3 = -1 - 2X + 2X^3 + X^4, \\ P_3 &= (X-1)^2(X+1)^2 = 1 - 2X^2 + X^4, \\ P_4 &= (X-1)^3(X+1) = -1 + 2X - 2X^3 + X^4, \text{ et} \\ P_5 &= (X-1)^4 = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4. \qquad \textbf{(1.5 pt)} \end{aligned}$$

On en déduit la représentation des polynômes $(P_i)_{1\leq i\leq 5}$ sous forme de 5-uplets dans la base cannonique :

$$\begin{aligned} P_1 &= (\ 1, 4,\ 6,\ 4,\ 1\ ) \\ P_2 &= (-1, -2, 0, 2, 1) \\ P_3 &= (\ \ 1, 0, -2, 0, 1) \\ P_4 &= (-1, 2, 0, -2, 1) \\ P_5 &= (1, -4, 6, -4, 1) \end{aligned}$$

2/ Comme $Card\mathcal{P} = \dim \mathbb{R}_4[X] = 5$, il suffit de calculer le rang de $\mathcal{P}$. On effectue pour cela un échelonnement du système de vecteurs colonnes représentant les polynômes $\mathcal{P}$ $= (P_i)_{1\leq i\leq 5}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{P_4 \longrightarrow P_4' = P_4 + P_3 \\ P_5 \longrightarrow P_5' = P_5 + P_4}]{\substack{P_2 \longrightarrow P_2' = P_2 + P_1 \\ P_3 \longrightarrow P_3' = P_3 + P_2}} \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & -2 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[\substack{P_4' \longrightarrow P''_4 = P_4' + P_3' \\ P_5' \longrightarrow P''_5 = P_5' + P_4'}]{P_3' \longrightarrow P''_3 = P_3' + P_2'} \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[P_5'' \longrightarrow P_5''' = P_5'' + P_4'']{P''_4 \longrightarrow P'''_4 = P_4'' + P_3''} \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 8 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{P_5''' \longrightarrow P_5'''' = P_5''' + P_4'''} \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}\right\}$$

en obtenant un système dont les termes du triagle supérieur à la diagonale sont nuls mais que tous les termes diagonaux sont non nuls on endéduit que $rg(\mathcal{P}) = 5$, d'où $(P_i)_{1\leq i\leq 5}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ **(2.5 pt).**

Exercice 3 : (7.5 pts)

1/ Soient n et m deux entiers strictement positifs et soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et m. On admettra que l'on peut définir une structure canonique de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur l'ensemble $E \times F$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall (x,y), \left(x^{'}, y^{'}\right) &\in E \times F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \text{ on a :} \\ (x,y) + \left(x^{'}, y^{'}\right) &= \left(x + x^{'}, y + y^{'}\right) \text{ et } \alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y). \end{aligned}$$

Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \times F$ est de dimension finie et que :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

2/ On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

a/ Quelle est la dimension de H ?

b/ Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{(1,1),\ (1,i),\ (0,1+i)\}$ forme une base de H.

c/ Exprimer un élément quelconque de H dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :

1/ Pour montrer que $E \times F$ est de dimension finie, on montre en utilisant la définition que $E \times F$ admet une famille génératrice finie. Soient $(e_i)_{i=1}^{i=n}$ une base de E et $(f_i)_{i=1}^{i=m}$ une base de F et soit $(x,y) \in E \times F$, donc il existe deux familles de scalaires $(\alpha_i)_{i=1}^{i=n}$ et $(\beta_i)_{i=1}^{i=m}$ de $\mathbb{K}$ telles que :

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \text{ et } y = \sum_{i=1}^{i=m} \beta_i f_i = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_m e_m$$

D'où :

$$\begin{aligned} (x,y) &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + ... + \beta_m f_m) \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n, 0) + (0, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + ... + \beta_m f_m) \\ &= [(\alpha_1 e_1, 0) + (\alpha_2 e_2, 0) + ... + (\alpha_n e_n, 0)] + [(0, \beta_1 f_1) + (0, \beta_2 f_2) + ... + (0, \beta_m f_m)] \\ &= [\alpha_1 (e_1, 0) + \alpha_2 (e_2, 0) + ... + \alpha_n (e_n, 0)] + [\beta_1 (0, f_1) + \beta_2 (0, f_2) + ... + \beta_m (0, f_m)] \end{aligned}$$

On en déduit que la famille finie de vecteurs $C = ((e_1,0), (e_2,0), ..., (e_n,0), (0,f_1), (0,f_2), ..., (0,f_m))$ est une famille génératrice de $E \times F$, et par conséquent $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. **(1.5 pt)**

Montrons que C est une famille libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$ des scalaires dans $\mathbb{K}$, tels que :

$$\lambda_1 (e_1,0) + \lambda_2 (e_2,0) + ... + \lambda_n (e_n,0) + \delta_1 (0,f_1) + \delta_2 (0,f_2) + ... + \delta_m (0,f_m) = 0 \text{ (ici } 0 = (0_E, 0_F) \text{).}$$

On en déduit que :

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n, \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + ... + \delta_m f_m) = (0_E, 0_F)$$

Par conséquent :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0_E \text{ et } \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + ... + \delta_m f_m = 0_F.$$

Comme les familles $(e_i)_{i=1}^{i=n}$ et $(f_i)_{i=1}^{i=m}$ sont libres, respectivement, dans E et F, alors :

$\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$ et $\delta_j = 0$ pour tout $j \in [[1, m]]$ C.Q.F.D..**(1 pt)**

Finalement, on déduit que C est une base de $E \times F$ et que :

$$\dim (E \times F) = CardC = n + m = \dim E + \dim F.\textbf{(0.5 pt)}$$

2/ On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

a/ En utilisant la question **1/,** on a : $\dim H = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 1 + 2 = 3.$**(1 pt)**

b/ Pour montrer que la famille $\mathcal{B} = \{(1, 1),\ (1, i),\ (0, 1 + i)\}$ forme une base de H, il suffira de montrer que $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice, car $Card\mathcal{B} = \dim H$. Puique il s'agira dans la question **c/** d'exprimer un vecteur quelconque de H dans $\mathcal{B}$, donc on va montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit donc $(x, z) \in H$, montrons qu'il existe des scalaires α, β, λ de $\mathbb{R}$ tels que :

$$(x, z) = \alpha(1, 1) + \beta(1, i) + \lambda(0, 1 + i)$$

En écrivant : $(x, z) = (x, a + bi)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (car $z \in \mathbb{C}$), on aura :

$$\begin{aligned}(x, a + bi) &= \alpha(1, 1) + \beta(1, i) + \lambda(0, 1 + i) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta i + \lambda (1 + i)) \\ &= (\alpha + \beta, \alpha + \lambda + (\beta + \lambda) i)\end{aligned}$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ a = \alpha + \lambda \\ b = \beta + \lambda \end{cases}$$

De la 2ème et 3ème équations on a : $a - b = \alpha - \beta$, puis en sommant avec la 1ère équation on trouve :

$$x + a - b = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{x + a - b}{2},$$

D'où $\beta = x - \alpha = x - \dfrac{x + a - b}{2} = \dfrac{x - a + b}{2}$ et $\lambda = a - \alpha = a - \dfrac{x + a - b}{2} = \dfrac{a - x + b}{2}$. C.Q.F.D.

En résumé on a :

$$\alpha = \frac{x + a - b}{2}, \beta = \frac{x - a + b}{2} \text{ et } \lambda = \frac{a - x + b}{2} \quad \textbf{(2 pt)}$$

c/ En utilisant la question précédente, on a pour tout $(x,z)=(x,a+bi)\in H$:

$$(x,z)=(x,a+bi)=\left(\frac{x+a-b}{2}\right)(1,1)+\frac{x-a+b}{2}(1,i)+\frac{a-x+b}{2}(0,1+i).\ \textbf{(1.5 pt)}$$

Exercice 4 : (7.5 pts)

1/ On considère dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs :

$$B_{\alpha,\beta}=(V_1=(1,\alpha,0)\,,V_2=(-2,0,\beta)\,,V_3=(-2,2,\beta))$$

Calculer, suivant les valeurs des réels α et β, le rang de $B_{\alpha,\beta}$, puis déterminer dans chaque cas un supplémentaire du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $B_{\alpha,\beta}$.

2/ On consière la famille $B_{0,1}$.

a/ Vérifier que $B_{0,1}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b/ Déterminer $f\in End(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$f(V_1)=(1,0,1)\,,f(V_2)=(0,1,1)\ \text{ et } f(V_3)=(1,-1,0)\,.$$

c/ En déduire : rgf et $\dim\ker f$, puis dire si f est bijective?.

Solution :

1/ On a :

$$S\ :\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \left\{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \beta & \beta \end{array}\right\} \end{array} \xrightarrow{V_3\longrightarrow V_3'=V_3-V_2} \left\{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \beta & 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{V_2\longrightarrow V_2'=V_2+2V_1}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 2 \\ 0 & \beta & 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{V_2'\longrightarrow V_2''=V_2'-\alpha V_3'} \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \beta & 0 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{on permute } V_2'' \text{ et } V_3'} \left\{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{array}\right\}.\quad \textbf{(1.5 pt)}$$

Deux cas se présentent :

Cas 1 : $\beta\neq 0$, alors $rg(B_{\alpha,\beta})=3$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, et dans ce cas $\langle B_{\alpha,\beta}\rangle=\mathbb{R}^3$ et le s.e.v. trivial (0) en est le supplémentaire. **(1 pt)**

Cas 2 : $\beta=0$, alors $rg(B_{\alpha,\beta})=2$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, et dans ce cas $\langle e_3=(0,0,1)\rangle$ est un supplémentaire de $\langle B_{\alpha,0}\rangle$ dans $\mathbb{R}^3$. **(1 pt)**

2/ On consière la famille $B_{0,1}$.

a/ D'après la question précédente (**Cas 1**), $B_{0,1}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. **(0.5 pt)**

b/ Pour déterminer $f \in End\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que :

$$f\left(V_1\right) = (1,0,1), f\left(V_2\right) = (0,1,1) \text{ et } f\left(V_3\right) = (1,-1,0),$$

on prend un vecteur quelconque (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ qu'on exprime dans la base :

$$B_{0,1} = \left(V_1 = (1,0,0), V_2 = (-2,0,1), V_3 = (-2,2,1)\right).$$

Il suffira de déterminer les scalaires réels a, b et c tels que :

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= aV_1 + bV_2 + cV_3 \\ &= a(1,0,0) + b(-2,0,1) + c(-2,2,1) \\ &= (a - 2b - 2c, 2c, b + c) \end{aligned}$$

On en déduit le système suivant : $\begin{cases} x = a - 2b - 2c \\ y = 2c \\ z = b + c \end{cases}$

D'où : $c = \dfrac{y}{2}$, $b = z - c = z - \dfrac{y}{2} = \dfrac{2z - y}{2}$ et $a = x + 2(b + c) = x + 2z.$

Ainsi : $(x,y,z) = (x + 2z)V_1 + \left(\dfrac{2z - y}{2}\right)V_2 + \dfrac{y}{2}V_3$

Donc :

$$\begin{aligned} f(x,y;z) &= f\left[(x + 2z)V_1 + \left(\frac{2z - y}{2}\right)V_2 + \frac{y}{2}V_3\right] \\ &= (x + 2z)f\left(V_1\right) + \left(\frac{2z - y}{2}\right)f\left(V_2\right) + \frac{y}{2}f\left(V_3\right) \\ &= (x + 2z)(1,0,1) + \left(\frac{2z - y}{2}\right)(0,1,1) + \frac{y}{2}(1,-1,0) \\ &= \left(x + \frac{y}{2} + 2z, -y + z, x - \frac{y}{2} + 3z\right) \qquad \textbf{(2 pt)} \end{aligned}$$

c/ On a :

$$\begin{aligned} rgf &= rg\left(f\left(V_1\right), f\left(V_2\right), \ f\left(V_3\right)\right) \\ &= rg\left((1,0,1), (0,1,1), \ (1,-1,0)\right) \\ &= 2 \text{ (On peut remarquer que : } f\left(V_3\right) = f\left(V_1\right) - f\left(V_2\right)\text{).} \quad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

En utilisant le théorème du rang, on déduit :

$$\dim\ker f = \dim\mathbb{R}^3 - rgf = 3 - 2 = 1, \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Donc f n'est pas injective et par conséquent f n'est bijective. **(0.25 pt)**

Exercice 5 : (5 pts)

I/ Soit A un polynôme impair à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1/ Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : A^{(p)}(X) = (-1)^{p+1} A^{(p)}(-X),$$

où $A^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de A.

2/ En déduire que pour $m \in \mathbb{N}^*$:

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de A de multiplicité m, alors $-\alpha$ est aussi une racine de A de multiplicité m.

II/ Décomposer en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$, la fraction :

$$F(X) = \frac{X}{(X^2+1)^2(X^2-1)}$$

Solution :

I/ 1/ Pour montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* : A^{(p)}(X) = (-1)^{p+1} A^{(p)}(-X)$,on utilise le raisonnement par récurrence.

Pour $p = 1$, comme P est impair on a : $A(X) = -A(-X)$, puis en dérivant on obtient :

$$A'(X) = (-1)^2 A'(-X) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Supposons maintenant que $A^{(p)}(X) = (-1)^{p+1} A^{(p)}(-X)$. Si on dérive les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$A^{(p+1)}(X) = (-1)^{p+2} A^{(p+1)}(-X) \qquad \text{C.Q.F.D.} \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

2/ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de A de multiplicité m, donc on a :

$$A(\alpha) = A'(\alpha) = ... = A^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } A^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

En utilisant l'imparité de A et la question précédente, on a :

$$A^{(p)}(\alpha) = (-1)^{p+1} A^{(p)}(-\alpha) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

D'où :

$$A(-\alpha) = A'(-\alpha) = ... = A^{(m-1)}(-\alpha) = 0 \text{ et } A^{(m)}(-\alpha) \neq 0. \quad \text{C.Q.F.D.} \quad \textbf{(1.5 pt)}$$

II/ On remarque que la fraction, F est sous forme réduite, de degré est negatif et de plus elle est impaire. On a :

$$F(X) = \frac{X}{(X^2+1)^2(X^2-1)} = \frac{X}{(X-i)^2(X+i)^2(X-1)(X+1)}$$

Comme F est une fraction à coefficients réels, sa décomposition à prori dans $\mathbb{C}(X)$ est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{(X-i)} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{\overline{a}}{(X+i)} + \frac{\overline{b}}{(X+i)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{d}{(X+1)}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

En utilisant aussi le fait que F est impaire, on obtient :

$$F(X) = -F(-X) = \frac{a}{(X+i)} + \frac{-b}{(X+i)^2} + \frac{\overline{a}}{(X-i)} + \frac{-\overline{b}}{(X-i)^2} + \frac{c}{(X+1)} + \frac{d}{(X-1)}$$

Par unicité de la décomposition , on aura la relation suivante : $d = c$. Par conséquent, il suffira de calculer a, b et c. Après calcul on trouve :

$$F(X) = -\frac{1}{8(X-i)} + \frac{1}{8}\frac{i}{(X-i)^2} - \frac{1}{8(X+i)} - \frac{1}{8}\frac{i}{(X+i)^2} + \frac{1}{8(X-1)} + \frac{1}{8(X+1)}$$

N.B. :
Note de l'interrogation 2 : Exo1+Exo2+Exo3. (Total 15pts).
Note de l'Examen Semestriel : Exo3 +Exo4+Exo5. (Total 20pts).