Examen Semestriel

L'usage du Mobile et de la Calculatrice est interdit.

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : (10 pts)

I/ Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$ et soit $B_C = (e_i)_{i=1}^{i=3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1- Déterminer f sachant que :

$$M_{B_C}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\textbf{(1 pt)}$$

2- Dire pourquoi f est bijective. **(1 pts)**

3- Déduire que A est inversible. Calculer A^{-1}. **(0.5pt + 1.5 pt)**

II/ Soit $\varphi \in End(\mathbb{R}_2[X])$ défini par :

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ & P = \alpha + \beta X + \lambda X^2 & \mapsto \varphi(P) = (\alpha - \beta) + (-\alpha + \beta) X + 2\lambda X^2. \end{array}$$

1- Déterminer $M = M_C(\varphi)$ où $C = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. **(1 pt)**

2- Soit C' une famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par : $C' = (P_1 = 1 + X,\, P_2 = X^2,\, P_3 = -1 + X)$. Vérifier que C' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. **(1 pt)**

3- Déduire $N = M_{C'}(\varphi)$. **(1 pt)**

4- Vérifier que : $N = A^{-1}.M.A$. **(1 pt)**

5- Déduire la relation : $M^n = A.N^n.A^{-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer M^n. **(1 pt+1 pt)**

Exercice 2 : (4 pts)

I/ On considère dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ la famille de vecteurs :

$$B_{\alpha,\beta} = (V_1 = (1, -1, \alpha, 0), V_2 = (2, 1, 0, \beta), V_3 = (-1, 2, 1, 0))$$

Calculer, suivant les valeurs des réels α et β, le rang de $B_{\alpha,\beta}$, puis déterminer dans chaque cas un supplémentaire du sous-espace engendré par $B_{\alpha,\beta}$.

Exercice 3 : (6 pts)
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les sous-ensembles :

$$S_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tM = M\right\} \text{ et } A_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \,;\, {}^tM = -M\right\}$$

1/ Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$. **(1.5 pt)**
2/ Déterminer une base de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$. **(3 pts)**
3/ Déduire que : $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires. **(1.5 pt)**

Exercice 4 : (5 pts)
Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A.{}^tA = I_2$. Soit f l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = {}^t A.M.A \end{array}$$

1- Montrer que f est linéaire. **(1 pt)**
2- Montrer que f est un automorphisme de $M_2(\mathbb{R})$. **(1.5 pt)**
3- Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
i- Vérifier que $A.{}^tA = I_2$. **(0.5 pt)**
ii- Déterminer $M(f, B_C)$, où :

$$B_C = \left\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}. \textbf{ (2 pts)}$$

N.B. : Note de l'interrogation : Exo1+Exo4. (Total 15pts).
Note de l'Examen Semestriel : Exo1 +Exo2+Exo3. (Total 20pts).

Bon Courage