ECOLE NATIONAL SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

Mécanique du point

Contrôle Intermediaire

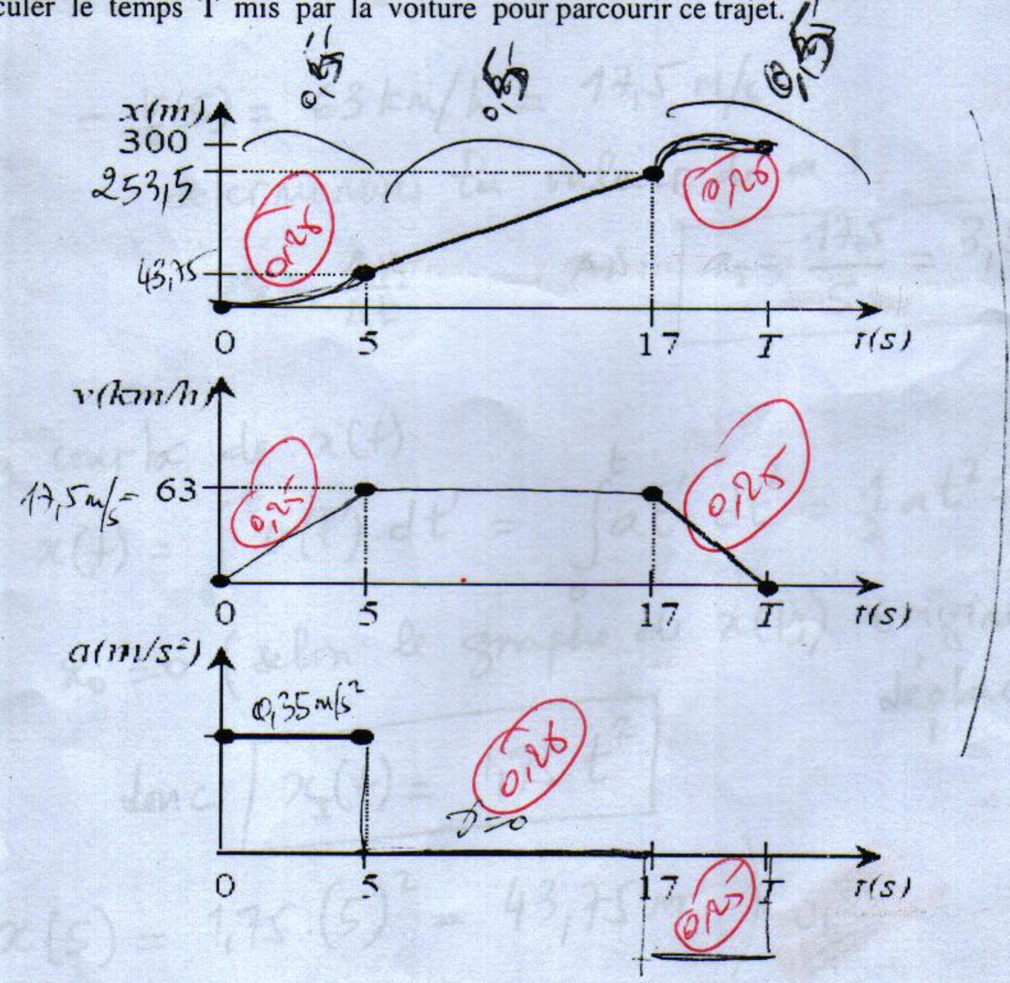
Partie B (Exercices)

Mardi 20 Avril 2010

Durée 1 heure

Exercice 1. (6points)

Une voiture roule sur une route horizontale rectiligne sur une distance de 300 m. Des informations partielles sont connues (voir schémas ci-contres). En vous justifiant par le calcul, compléter cette description cinématique du mouvement de la voiture. A côté de chaque portion de courbe ajoutée, indiquer la nature de cette courbe et compléter les valeurs manquantes au schéma.
Calculer le temps T mis par la voiture pour parcourir ce trajet.



Vous ferez attention aux unités accompagnant les mesures de positions, vitesses et accélérations.

Vous compléterez la figure ci-contre, qui sera rendue avec votre copie de calcul

Exercice n° 1 (6 points).

Phase I : Mouvement entre $t = 0s$ et $t = 5s$.

- selon la courbe de l'accélération
  $a_I(t) = c^{te} \Rightarrow$ MRUA

0,25

1,50

- $v_I(t) = \int_0^t a_I(t') \, dt' = at + v_0$.
  $v_0 = 0$ (selon le graphe de $v(t)$).
  donc $v_I(t) = a_I t$.

0,25

- $v_I(5) = 63 \, km/h = 17,5 \, m/s$
  Déterminons la valeur de a ?
  $a_I = \frac{\Delta v_I}{\Delta t}$ A.N : $\boxed{a_I = \frac{17,5}{5} = 3,5 \, m/s^2}$

0,5

- la courbe de $x(t)$
  $x(t) = \int_0^t v(t') . dt' = \int_0^t at' . dt' = \frac{1}{2} a t^2 + x_0$.
  $x_0 = 0$ (selon le graphe de $x(t)$) : origine des déplacement
  donc $\boxed{x_I(t) = 1,75 \, t^2}$

0,25

- $x(5) = 1,75 . (5)^2 = 43,75 \, m$.

0,25

1,50

Phase II t entre 5s et 17s.

- la courbe de $x(t)$ est une droite oblique
  $\Rightarrow$ MRU.

0,25

- La vitesse est constante est égale à $v(5)$ de la phase I; $v_{II} = v(5) = 17{,}5\,m/s$. 0,5

- L'accélération $a_{II}(t) = 0$. 0,25

- Déterminons $x(17)$?

$$x(17) = v_{II}(t-5) + x(5).$$ 0,5

AN: $x(17) = 17{,}5 \cdot 12 + 43{,}75 = 253{,}5\,m$.

0,50 **Phase III** mouvement entre $t = 17s$ et $t = T$

- Selon le graphe de $v(t)$ la vitesse est décroissante $\Rightarrow$ MRUA. 0,25

- Déterminons T.

$$x_{III}(t) = \frac{1}{2} a_{III} (t-17)^2 + v(17) \cdot (t-17) + x(17). \quad (1)$$

$$a_{III} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{V(T) - V(17)}{T - 17} \quad ; \quad V(T) = 0 \text{ (graphe de } v(t)\text{)}.$$

alors $a_{III} = \dfrac{-V(17)}{T-17}$ (2)

On remplace (2) dans (1)

$$x_{III}(T) = \frac{1}{2} \frac{(-V(17))}{\cancel{(T-17)}} \cdot (T-17)^{\cancel{2}} + v(17) \cdot (T-17) + x(17)$$

$$x(T) - x(17) = \frac{v(17)}{2} \cdot (T-17).$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot \frac{x(T) - x(17)}{V(17)} + 17.$$

AN: $T = 2 \cdot \frac{300 - 253{,}5}{17{,}5} + 17 = 22{,}33\,s$

$$\boxed{T = 22{,}33\,s}$$

0,5

$- \ a_{III} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(T) - V(17)}{T - 17} = \frac{-V(17)}{T-17}$

AN : $a_{III} = \frac{-17{,}5}{22{,}33 - 17} = -3{,}28\,m/s^2$

0,25

$$\boxed{a_{III} = -3{,}28\,m/s^2}$$

$-$ la courbe de $x_{III}(t)$. (equation horaire.)

$x_{III}(t) = -1{,}64\,(t-17)^2 + 17{,}5\,(t-17) + x(17)$

$= -1{,}64\,t^2 + (34 + 17{,}5)\,t + x(17) - (17)^2 - (17 \cdot 17{,}5)$

$= -1{,}64\,t^2 + 51{,}5\,t - 158$

0,5

$$\boxed{x_{III}(t) = -1{,}64\,t^2 + 51{,}5\,t - 158}$$

Exercice n° 2 (4 points).

1 - vitesse angulaire.

* $\omega = 20\ tr/mn.$; $\omega = \dfrac{20 \cdot 2\pi}{60} = \dfrac{2}{3}\pi\ rad/s$

$\underline{\omega = 2{,}09\ rad/s}$

* $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$; $f = \dfrac{2/3\,\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{3}\ s^{-1}$

0,5

2 - vecteur position

$\overrightarrow{OM} = r\vec{\mu}_r$

0,5

3 - l'expression du vecteur vitesse

r ~~est~~ fixe

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(r\vec{\mu}_r)}{dt} = \underbrace{\dfrac{dr}{dt}}_{=0} \cdot \vec{u}_r + r\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}$

$\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \underbrace{\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}}_{=\vec{u}_\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \cdot \dfrac{d\theta}{dt}$

$\dot{\theta} =$

donc ~~[illegible]~~

$\vec{v}(t) = r\dfrac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_\theta = r\dot{\theta}\vec{\mu}_\theta.$

1,5 pts

4 - vecteur accélération

$\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(r\dot{\theta}\vec{\mu}_\theta)}{dt}$

$$a(t) = \overbrace{\frac{dr}{dt}}^{=0} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{\mu}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \mu_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$= r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \vec{\mu}_\theta + r\dot{\theta} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \overbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}}^{=-\vec{u}_r} \cdot \frac{d\theta}{dt} = - \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{\mu}_r \quad (2)$$

On remplace (2) dans (1)

$$a(t) = r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{\mu}_\theta - r\dot{\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{\mu}_r$$

1,5 pts

$$\boxed{a(t) = r\ddot{\theta}\vec{\mu}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{\mu}_r}$$

ESI
ÉCOLE NATIONAL SUPÉRIEURE D'INFORMATIQUE

Mécanique du point

Contrôle Intermediaire

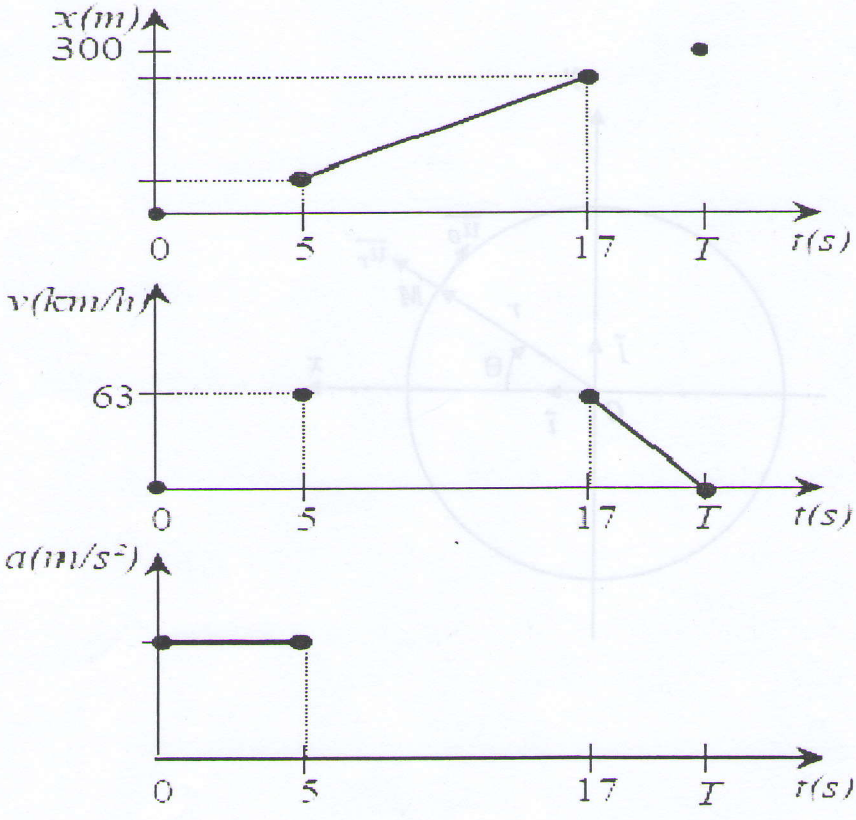
Partie B (Exercices)

Mardi 20 Avril 2010
Durée 1 heure

Exercice 1. (6points)

Une voiture roule sur une route horizontale rectiligne sur une distance de 300 m. Des informations partielles sont connues (voir schémas ci-contres). En vous justifiant par le calcul, compléter cette description cinématique du mouvement de la voiture. A côté de chaque portion de courbe ajoutée, indiquer la nature de cette courbe et compléter les valeurs manquantes au schéma.

Calculer le temps T mis par la voiture pour parcourir ce trajet.



Vous ferez attention aux unités accompagnant les mesures de positions, vitesses et accélérations.

Vous compléterez la figure ci-contre, qui sera rendue avec votre copie de calcul

Exercice 2. (4points)

Un point M se déplace sur un cercle de rayon $r = 10cm$ et de centre O avec une vitesse angulaire constante ω de 20 tours par minute. Sa position sur le cercle est repéré grâce à l'angle $\Theta(t)$ entre l'axe Ox et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. Donnez la vitesse angulaire du point M en radians par seconde ainsi que sa fréquence en s^{-1}.
2. Dans le repère polaire (O, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$), donnez l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de r et $\Theta(t)$.
3. En dérivant le vecteur OM par rapport au temps, donnez l'expression du vecteur $\vec{v}$ en fonction de r, $\Theta(t)$ et ω.
4. Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction de r, $\Theta(t)$ et ω.