E.S.I. 1CPI ALG2 Contrôle intermédiaire 06 avril 2016 Durée : 1h30

N.B. :

Le barème est approximatif.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie.
L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

Exercice 1 : Les parties suivantes sont indépendantes :

Partie I : (1pt +1pt)

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit le sous-ensemble de E :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}.$$

1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2- Soit la famille de vecteurs de E :

$$B = \{P_0 = X - 1,\ P_1 = X(X-1),\ \dots,\ P_{n-1} = X^{n-1}(X-1)\}.$$

Montrer que tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs de B.

Partie II : Questions de cours. (1 pt pour chaque question)

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-e.v.

1- Soient F et G deux s.e.v. de E. Montrer que :

a- ($F \cup G$ s.e.v. de E) $\Rightarrow$ ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

b- Le plus petit s.e.v. contenant $F \cup G$ est $F + G$ (on ne demande pas de montrer que $F + G$ est un s.e.v. de E).

2- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. de E. Montrer que :

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} E_i = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n \text{ est un s.e.v. de } E,$$

en d'autres termes : une intersection finie de s.e.v. de E est un s.e.v. de E.

Exercice 2 : (1 pt pour chaque question)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons le groupe multiplicatif $U = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$ et le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1- Préciser (sans démonstration) les éléments de U et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2- On considère l'application : $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to U$, $\overline{k} \mapsto \varphi(\overline{k}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

a- Vérifier que φ est bien définie, c'est à dire que :

$$\forall \overline{k}, \overline{l} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\ \overline{k} = \overline{l} \Rightarrow \varphi(\overline{k}) = \varphi(\overline{l}).$$

b- Montrer que φ est un morphisme de groupes.

c- Montrer que φ est injectif.

d- En déduire que φ est un isomorphisme de groupes.

Bon courage

$F \cap G$

$x+y \in F$

$x-y \in G$

$x+y \in F \cup G$ - ($F \cup G$ s.e.v def)

$F \subset G$.

$F \cup G$.

$x+y \in F \cup G$

$F \subset G$

$x+y \in F$

$G \subset F$