Partie II : (10 pts) (A répondre sur le cahier d'examen)
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On pose $B_\alpha = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ une famille de vecteurs de E, où :

$$V_1 = (-1, 1, 1, \alpha)\,, V_2 = (1, 1, \alpha, -1)\,, V_3 = (1, \alpha, -1, 1)\,, V_4 = (\alpha, -1, 1, 1)$$

Les questions 1/ et 2/ ci-dessous sont indépendantes

1/ Donner, suivant les valeurs de α, le rang de B_α.

2/ **a)** Soit $F = \langle B_{-1} \rangle$ le sous-espace vectoriel de E engendré par B_{-1}.

i) Calculer $\dim_{\mathbb{R}} F$.

ii) Trouver un supplémentaire G de F.

b) Soit K le s-ev de E, défini par :

$$K = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus x - y + 3z + 2t = 0 \text{ et } 2x - y + z + 3t = 0\right\}$$

Trouver une base de K, puis donner $\dim_{\mathbb{R}} K$.

c) K et F sont-ils supplémentaires? Justifier.

BON COURAGE

Partie II : (10 pts)
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On pose $B_\alpha = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ une famille de vecteurs de E, où :

$$V_1 = (-1, 1, 1, \alpha), V_2 = (1, 1, \alpha, -1), V_3 = (1, \alpha, -1, 1), V_4 = (\alpha, -1, 1, 1)$$

1/ Donner, suivant les valeurs de α, le rang de B_α.
Réponse :

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3' & V_4' \\ -1 & 1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha+1 \\ \alpha & -1 & \alpha+1 & 0 \end{array}, \quad V_3' = V_3 + V_1 \text{ et } V_4' = V_4 + V_2$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_2' & V_3' & V_4' \\ -1 & 0 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 0 & \alpha+1 \\ \alpha & \alpha-1 & \alpha+1 & 0 \end{array}, \quad V_2' = V_2 + V_1$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_2' & V_3'' & V_4'' \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha-1 & 1 & 0 \end{array}, \quad V_3' = \frac{1}{\alpha+1} V_3 \text{ et } V_4' = \frac{1}{\alpha+1} V_4 \text{ si } \alpha \neq -1.$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_3'' & V_5 & V_2' \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha & \alpha-1 \end{array}, \quad V_5 = V_4'' + V_1$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_3'' & V_5 & V_2' \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha & \alpha-1 \end{array}, \quad V_5 = V_4'' + V_1$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_3'' & V_5' & V_2'' \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha-1 & \alpha-3 \end{array}, \quad V_5' = V_5'' - V_3'' \text{ et } V_2'' = V_2' - 2V_3''$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_3^{''} & V_5^{'} & V_2^{''} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha-1 & \alpha-3 \end{array} \quad , \quad V_5^{'} = V_5^{''} - V_3^{'} \text{ et } V_2^{''} = V_2^{'} - 2V_3^{'}$$

$$\sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_3^{''} & V_5^{'} & V_6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha-1 & -(\alpha^2-2\alpha+5) \end{array} \quad , \quad V_6 = 2V_2^{''} - (\alpha+1)V_5^{'} \ \textbf{(2pts)}$$

Puisque $(\alpha^2 - 2\alpha + 5) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $rgB_\alpha = 4$ pour tout $\alpha \neq 1$. **(1pt)**
Pour $\alpha = -1$, on a :

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3^{'} & V_4^{'} \\ -1 & 1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha+1 \\ \alpha & -1 & \alpha+1 & 0 \end{array} \quad , \quad V_3^{'} = V_3 + V_1 \text{ et } V_4^{'} = V_4 + V_2$$

$$\sim \begin{array}{cc} V_1 & V_2^{'} \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{array} \quad , \quad V_2^{'} = V_2 + V_1$$

D'où $rgB_{-1} = 2$. **(1 pt)**

2/ a) Soit $F = \langle B_{-1} \rangle$ le sous-espace vectoriel de E engendré par B_{-1}.

i) Calculer $\dim_{\mathbb{R}} F$.

Réponse : D'après la question précédente, $\left(V_1, V_2^{'} = V_2 + V_1\right)$ est une base de F, donc $\dim_{\mathbb{R}} F = 2$. **(0.5pt)**

ii) Trouver un supplémentaire G de F.

Réponse : On peut prendre comme supplémentaire $G = \langle e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1) \rangle$ **(1pt)**

b) Soit K le s-ev de E, défini par :

$$K = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \setminus x - y + 3z + 2t = 0 \text{ et } 2x - y + z + 3t = 0\right\}$$

Trouver une base de K, puis donner $\dim_{\mathbb{R}} K$.

Réponse : On trouve par exemple : $((W_1 = 1,-1,0,-1), W_2 = (0,7,1,2))$ une base de K **(2pt)**, d'où $\dim_{\mathbb{R}} K = 2$. **(0.5pt)**

c) K et F sont-ils supplémentaires? Justifier.

Réponse : On utilise la propriété suivante :

K et F sont supplémentaires si et seulement si la famille $\left(V_1, V_2^{'}, W_1, W_2\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Puisque $card\left(V_1, V_2^{'}, W_1, W_2\right) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que $\left(V_1, V_2^{'}, W_1, W_2\right)$ est libre, et après échelonnement on trouve que K *et* F sont supplémentaires. **(2pt)**