E.S.I.
2010-2011
1CPI : SECTIONS A ET B.

CORRIGE SUCCINT du CONTROLE INTERMEDIAIRE ALGEBRE 2

PARTIE 1 : (ALGEBRE LINEAIRE)
Pour toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.
Exercice 1 : (5.5 pts)
I- Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.
1- Montrer que :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$: $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $x = 0$.**(0.5 pt)**

Solution : Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, il suffit de montrer que $(\alpha x = 0$ et $\alpha \neq 0) \Rightarrow x = 0$. Pour cela on multiplie, à gauche, l'égalité $\alpha x = 0$ par α^{-1}, on obtient ainsi : $\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}0$ d'où $x = 0$.

2- Soient F et G deux s.e.v. de E. Montrer que : $\langle F \cup G \rangle = F + G$.**(1.5 pts)**

Solution : En utilisant la définition d'un s.e.v. engendré par une partie, on doit montrer les trois propriétes suivantes :

i/ $F \cup G \subset F + G$. **ii/** $F + G$ s.e.v. de E. **iii/** Si H est un s.e.v. de E tel que $F \cup G \subset H$ alors $F + G \subset H$. En effet :

i/ Soit $x \in F \cup G$, alors $x \in F$ ou $x \in G$. Si $x \in F$, alors on peut écrire $x = x + 0 \in F + G$, et il en est de même si $x \in G$.

ii/ $F + G$ s.e.v. de E est un résultat du cours.

iii/ Soit H un s.e.v. de E tel que $F \cup G \subset H$, alors montrons que $F + G \subset H$. Soit $z \in F + G$, donc $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$, donc $x, y \in F \cup G$ d'où $x, y \in H$ par hypothèse. Or H est un s.e.v. de E, donc $x + y = z \in H$. CQ.F.D..

3- Soit F un sous-ensemble de E. Montrer que : **(1.5 pts)**

$(F \neq \varnothing$ et F stable par combinaison linéaire de couple de vecteurs$) \Rightarrow F$ sous-espace vectoriel de E.

Solution : On rappelle que F stable par combinaison linéaire de couple de vecteurs veut dire que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et pour tous $x, y \in F$ le vecteur $\alpha x + \beta y \in F$.

Pour monter que F est un sous-espace vectoriel de E, on utilise la définition, i.e. : on montre que F muni des lois de E est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel. Pour cela, on commence par monter que $(F, +)$ est un groupe abélien, il suffira donc de monter que F est un sous-groupe de $(E, +)$. On a déjà par hypothèse $F \neq \varnothing$, et soient $x, y \in F$ donc $x + y \in F$ (on prend $\alpha = \beta = 1$), et $-x \in F$ (on prend $\alpha = -1$ et $\beta = 0$ et on utilise que $(-1)x = -x$).

Pour les autres propriétés, il suffira de considérer les éléments de F comme étants des éléments de E.

II- On considère le $\mathbb{C}$- espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1- La famille de vecteurs $(1, i)$ est-elle libre? Justifier. **(0.5 pt)**

Solution : Non $(1, i)$ n'est-elle pas libre car : $i = i.1$.

2- La famille de vecteurs $(1, i)$ est-elle génératrice minimale? Justifier. **(0.5 pt)**

Solution : Non $(1, i)$ n'est-elle pas génératrice minimale car : $i = i.1$.

III- Ecrire chacune des fonctions suivantes comme somme d'une fonction paire et une fonction impaire. **(1 pt)**

$$\exp x, \quad \cos x, \quad x + x^3 \text{ et } 2.(\exp \text{ désigne la fonction exponentielle}).$$

Solution : On rappelle ce résultat vu en TD : $A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est somme directe de son s.e.v. des applications paires et de son s.e.v. des applications impaires.

$$\text{Pour tout } f \in A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f = g + h \text{ où } g, h \in A(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire,}$$

tels que : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. D'où :

$$\exp x = chx + shx, \ \cos x = \cos x + 0, \ x + x^3 = 0 + \left(x + x^3\right) \text{ et } 2 = 2 + 0.$$

Exercice 2 : (4.5 pts)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est un morphisme d'espaces vectoriels s'il vérifie :

i/ Pour tous V, $W \in E$: $f(V + W) = f(V) + f(W)$.

ii/ Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $V \in E$: $f(\alpha V) = \alpha f(V)$.

I/ Considérons les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et soit l'application f définie par:

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & f(x, y) & \mapsto & f(x, y) = (x + 2y, x + 2y, 0) \end{array}$$

1/ Montrer que f est un morphisme d'espaces vectoriels. **(1 pt)**

Solution : Soeint (x, y) et $\left(x', y'\right) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

i/

$$\begin{aligned} f\left[(x, y) + \left(x', y'\right)\right] &= f\left[\left(x + x', y + y'\right)\right] \\ &= \left(x + x' + 2\left(y + y'\right), x + x' + 2\left(y + y'\right), 0\right) \\ &= (x + 2y, x + 2y, 0) + \left(x' + 2y', x' + 2y', 0\right) \\ &= f(x, y) + f\left(x', y'\right). \end{aligned}$$

i/

$$f\left[\alpha\left(x,y\right)\right]=f\left(\alpha x,\alpha y\right)=\left(\alpha x+2\alpha y,\alpha x+2\alpha y,0\right)=\alpha\left(x+2y,x+2y,0\right)=\alpha f\left(x,y\right).$$

2/ Calculer l'image par f des deux vecteurs $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$. **(0.5 pt)**

Solution : On a : $f\left(e_1\right)=f\left(1,0\right)=\left(1,1,0\right)$ et $f\left(e2\right)=f\left(0,1\right)=\left(2,2,0\right)$.

3/ Est-ce que la famille $\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right)\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Déduire.**(1 pt)**

Solution : La famille $\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right)\right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, car son cardinal est inférieur strictement à $\dim\mathbb{R}^3$.

On déduit que l'image d'une famille génératrice, par un morphisme d'espaces vectoriels, de l'espace de départ n'est pas nécessairement une famille génératrice de l'espace d'arrivée.

4/ Est-ce que la famille $\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right)\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Déduire.**(1 pt)**

La famille $\left(f\left(e_1\right),f\left(e_2\right)\right)$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$, car $f\left(e_2\right)=2.f\left(e_1\right)$.

On déduit que l'image d'une famille libre, par un morphisme d'espaces vectoriels, de l'espace de départ n'est pas nécessairement une famille libre de l'espace d'arrivée.

II/ Soit $f:E\to E$ un morphisme d'espaces vectoriels vérifiant $f\circ f=0$. Montrer que: $\operatorname{Im} f\subset\ker f$. **(1 pt)**

Solution : on rappelle que l'hypothèse $f\circ f=0$ veut dire que pour tout $x\in E$: $f\left(f\left(x\right)\right)=0$. Soit $y\in\operatorname{Im} f$, il existe $x\in E$ tel que $y=f\left(x\right)$, donc $f\left(y\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=0$, i.e. $y\in\ker f$.

PARTIE 2 : (ARITHMETIQUE DANS $\mathbb{Z}$)

Exercice 1 : (5 pts)

On considère **l'anneau unitaire commutatif** $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

1- Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. **(1.5 pts)**

Solution : On a : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7}\right\}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

2- Déduire :

a/ Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. **(0.5 pt)**

Solution : Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont : $\overline{1},\overline{3},\overline{5}$ et $\overline{7}$.

b/ Les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. (On rappelle qu'un élément x d'un anneau unitaire $(A,+,.)$ est dit nilpotent s'il existe un entier positif non nul k tel que $x^k=0$).**(0.5pt)**

Solution : Les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont : $\overline{0}$ ($\overline{0}^1 = \overline{0}$), $\overline{2}$ ($\overline{2}^3 = \overline{0}$), $\overline{4}$ ($\overline{4}^2 = \overline{0}$), $\overline{6}$ ($\overline{6}^3 = \overline{0}$).

c/ $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas intègre. **(0.5 pt)**

Solution : On a par exemple : $\overline{2} \neq \overline{0}$ et $\overline{2}\,.\overline{2} = \overline{0}$.

3- Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x - \overline{1} = \overline{\alpha}$ où $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. **(2 pts)**

Solution : Dressons le tableau suivant :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$x^2 + x - \overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$

On en déduit :

- Si $\overline{\alpha} \in \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ l'équation : $x^2 + x - \overline{1} = \overline{\alpha}$ n'a pas de solutions.
- Si $\overline{\alpha} = \overline{1}$ alors il y'a deux solutions : $x = \overline{1}$ et $x = \overline{6}$.
- Si $\overline{\alpha} = \overline{3}$ alors il y'a deux solutions : $x = \overline{3}$ et $x = \overline{4}$.
- Si $\overline{\alpha} = \overline{5}$ alors il y'a deux solutions : $x = \overline{2}$ et $x = \overline{5}$.
- Si $\overline{\alpha} = \overline{7}$ alors il y'a deux solutions : $x = \overline{0}$ et $x = \overline{7}$.

Exercice 2 : (3.5 pts)

On considère **l'anneau unitaire commutatif** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1- Montrer que : $\overline{m}$ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si m et n sont premiers entre eux. **(2 pts)**

Solution : Soit $\overline{m}$ un inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc il existe $\overline{m_1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{m}\,.\overline{m}_1 = \overline{1}$, d'où $mm_1 - 1 = nk$ où $k \in \mathbb{Z}$, en d'autres termes $mm_1 - nk = 1$ et d'après Bezout m et n sont premiers entre eux. ll suffit de considérer le chemin inverse pour avoir l'équivalence cherchée.

2- Supposons que n est un nombre premier.

Quels sont les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? **(1.5 pts)**

Solution : On sait que $\overline{0}$ est nilpotent. Soit x un élément nilpotent non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et supposons que k est le plus petit entier strictement positif vérifiant $x^k = \overline{0}$. On a : $x^k = x.x^{k-1} = 0$. Comme n est un nombre premier, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps et par conséquent c'est un anneau intègre, on en déduit que $x = \overline{0}$ ou $x^{k-1} = \overline{0}$. Or $x \neq \overline{0}$ par hypothèse et $x^{k-1} \neq \overline{0}$ sinon k ne serait le plus entier strictement positif vérifiant $x^k = \overline{0}$, contradiction.

D'où $\overline{0}$ est le seul élément nilpotent de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3 : (1.5 pts)

Soit la fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$\mu(1) = 1 \text{ et si } n > 1 \text{ tel que : } n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_m^{a_m}$$

où les p_i sont des nombres premiers pour $1 \leq i \leq m$ et $a_1, a_2, ...a_m, m \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\mu(n) = (-1)^m \text{ si } a_1 = a_2 = ... = a_m = 1 \text{ et } \mu(n) = 0 \text{ sinon.}$$

Calculer : $\mu(60)$ et $\mu(30)$.

Solution : On a : $60 = 2^2.3.5$ et $30 = 2.3.5$, donc $\mu(60) = 0$ et $\mu(30) = (-1)^3 = -1$.