Corrigé du Contrôle intermédiaire

Partie 1 : Algèbre Linéaire.
Exercice 1 : (5pts)
Soient $E=\mathbb{R}^4$, $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 :\ 2x+y-3z+t=0\}$.
1/ Montrer que F est un s.e.v. de E et donner une base de F.
2/ On pose $G=<(1,1,1,1)>$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
Solution :
1/

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x,-2x+3z-t,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x,z,t\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \langle v_1=(1,-2,0,0)\,,v_2=(0,3,1,0)\,,v_3=(0,-1,0,1)\rangle \end{aligned}$$

d'où F est un s.e.v. de E et (v_1,v_2,v_3) est une famille génératrice de F. **(1pt + 1pt)**
De plus (v_1,v_2,v_3) est libre (on peut le vérifier par échelonnement, par exemple). **(1pt)**
2/ Par définition, G est un s.e.v. de E. Si on pose $w=(1,1,1,1)$, on a :

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E &\Leftrightarrow (v_1,v_2,v_3,w) \text{ base de } \mathbb{R}^4 \quad \textbf{(0.5pt)} \\ &\Leftrightarrow (v_1,v_2,v_3,w) \text{ famille libre de } \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

car : $card\,(v_1,v_2,v_3,w)=\dim\mathbb{R}^4=4$. **(0.5pt)**
En échelonnant (v_1,v_2,v_3,w), on vérifie qu'elle est libre. **(1pt)**

Exercice 2 : (5pts)
On considère dans l'espace $E=\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$u=(1,1,0,-1)\,,v=\ (1,0,0,-1)\,,w=(1,-1,0,-1)$$

On pose : $A=<u,v,w>$ le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{u,v,w\}$, et soit le s.e.v. de E :

$$B=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x+y-z+2t=0\right\}$$

Déterminer une base de $A,B,A+B$ et $A\cap B$.
Solution :
1- En échelonnant la famille $\{u,v,w\}$, on remarque est liée. En effet :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

On peut choisir comme base de A : $(u=(1,1,0,-1)\,,-(v-u)=e_2=\ (0,1,0,0))$. **(0.5pt)**

2-

$$\begin{aligned}
B &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+y-z+2t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / z=x+y+2t\right\}\\
&= \left\{(x,y,x+y+2t,t)\in\mathbb{R}^4 / x,y,t\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \langle v_1=(1,0,1,0)\,, v_2=(0,1,1,0)\,, v_3=(0,0,2,1)\rangle \qquad \textbf{(0.5pt)}
\end{aligned}$$

De plus, $(v_1=(1,0,1,0)\,, v_2=(0,1,1,0)\,, v_3=(0,0,2,1))$ est libre donc base de B. **(0.5pt)**

3- le s.e.v. $A+B$ admet pour famille génératrice : (v_1,v_2,v_3,u,e_2) (réunion des bases de A et de B). **(0.5pt)**

Il suffit d'étudier la liberté de (v_1,v_2,v_3,u,e_2) par échelonnement :

$$\begin{array}{ccccc}
v_1 & v_2 & v_3 & u & e_2\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}
\sim
\begin{array}{ccccc}
v_1 & v_2 & v_3 & u^{'} & e_2^{'}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 2 & -1 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}
\ , u^{'}=u-v_1 \text{ et } e_2^{'}=e_2-v_2$$

$$\sim
\begin{array}{ccccc}
v_1 & v_2 & v_3 & u^{''} & e_2^{''}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 2 & -2 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1
\end{array}
\ , u^{''}=u^{'}-v_2 \text{ et } e_2^{''}=2e_2^{'}+v_3$$

On remarque que $u^{''}$ et v_3 sont liés, donc en supprimant $u^{''}$ on trouve une famille libre $\left(v_1,v_2,v_3,e_2^{''}\right)$ qui est une base de $A+B$. **(1pt)**

4- D'après la formule :

$$\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)\,,$$

on aura : $\dim(A\cap B)=1$.

Soit $(x,y,z,t)\in A\cap B$, donc :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) &= (x,y,x+y+2t,t) \text{ car } (x,y,z,t)\in B\\
&= \alpha u+\beta e_2 \text{ car } (x,y,z,t)\in A \text{ et } (u,e_2) \text{ base de } A\\
&= \alpha(1,1,0,-1)+\beta(0,1,0,0)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases}
x &= \alpha\\
y &= \beta\\
x+y+2t &= 0\\
t &= -\alpha
\end{cases}$$

On remplace les équations : $(1)\,,(2)$ et (4) dans (3), on obtient : $\alpha+\beta-2\alpha=0$ i.e. : $\beta=0$.

Cela veut dire que : $(x,y,z,t)=\alpha u=\alpha(1,1,0,-1)$, d'où : $A\cap B\subset\langle u\rangle$.

Comme : $\dim(A\cap B)=\dim\langle u\rangle=1$ donc : $A\cap B=\langle u\rangle$, par conséquent : (u) base de $A\cap B$. **(1.5pt)**

Exercice 3 : (5pts)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$

Soit l'application f définie par : $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \mapsto f(P) = P - XP' \end{array}$ où P' désigne la dérivée de P.

1/ Montrer que f est linéaire.

2/ Trouver une base de $\ker f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3/ Trouver une base de $\operatorname{Im} f$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution :

1/ Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(P_1 + \alpha P_2) &= (P_1 + \alpha P_2) - X(P_1 + \alpha P_2)' \\ &= \left(P_1 - XP_1'\right) + \alpha\left(P_2 - XP_2'\right) \\ &= f(P_1) + \alpha f(P_2). \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

2/ On a :

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } f(P) = 0\}.$$

Si on pose : $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, où : $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, on aura :

$$\begin{aligned} f(P) &= 0 \Leftrightarrow P - XP' = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3\right) - X\left(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = a_2 = a_3 = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\ker f = \{P = a_1X \text{ tel que : } a_1 \in \mathbb{R}\} = \langle X \rangle. \quad \textbf{(1pt)}$$

On complète la base de $\ker f$ par la famille : $(1, X^2, X^2)$. **(1pt)**

3/ On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(P) \text{ tel que : } P \in \mathbb{R}_3[X]\ \} \\ &= \left\{a_0 - a_2X^2 - 2a_3X^3 \text{ tel que : } P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\ \right\} \\ &= \left\langle 1, X^2, X^3 \right\rangle \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

On complète la base de $\operatorname{Im} f$par la famille : (X). **(1pt)**

Exercice 4 : (2pts)

On considère les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$. Dire, **en justifiant,** si les applications suivantes sont linéaires :

1/ $\begin{array}{lll} f: & \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & z & \mapsto f(z) = \overline{z} \end{array}$, où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

2/ $\begin{array}{lll} g: & \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & z & \mapsto f(z) = |z| \end{array}$, où $|z|$ désigne le module de z.

Solution :
1/ f est linéaire car pour tous $z, z^{'} \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(z+\alpha z^{'}\right) &= \overline{z+\alpha z'} \\ &= \overline{z}+\alpha\overline{z'} \text{ (on utilise les propriétés du conjugué)} \\ &= f(z)+\alpha f\left(z^{'}\right). \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

2/ g n'est pas linéaire car il existe des nombres comlexes $z, z^{'} \in \mathbb{C}$ tels que l'on a :

$$g\left(z+z^{'}\right) \neq g(z)+g\left(z^{'}\right) \text{ (on utilise les propriétés du module).} \qquad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 5 : (3pts)
Soient les matrices réelles suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1/ Déterminer le type de chaque matrice.
2/ Déterminer les éléments : a_{11}, b_{31}, c_{21}.
3/ Calculer : $A+B$, AC.
Solution :
1/ Les types respectifs sont : $(2.3), (2.3), (3.2)$. **(0.25×3pt)**
2/ $a_{11}=0$, b_{31} n'existe pas, $c_{21}=2$. **(0.25×3pt)**
3/ $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. **(0.5pt)**
et $AC=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. **(1pt)**

Partie 2 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
Exercice 1 : (5pts)
On considère **l'anneau unitaire commutatif** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
1- Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation : $\overline{2}x+\overline{3}=\overline{4}$.
3- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est-il un corps ? Justifier.
Solution :
1- On a : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\right\}$. **(0.5pt)**

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

. **(1.5pt)**

2- En multipliant l'équation $\overline{2}x+\overline{3}=\overline{4}$ par $\overline{3}$, on obtient l'équation : $x+\overline{4}=\overline{2}$ auquelle on ajoute $\overline{1}$. Finalement, on obtient : $x=\overline{3}$. **(1.5pt)**

3- Oui $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps, car tout élément différent de $\overline{0}$ admet un symétrique. En effet:

$$\left(\overline{1}\right)^{-1}=\overline{1}, \left(\overline{2}\right)^{-1}=\overline{3}, \left(\overline{3}\right)^{-1}=\overline{2} \text{ et } \left(\overline{4}\right)^{-1}=\overline{4}. \textbf{ (1.5pt)}$$

Exercice 2 : (5pts)

1- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'entier 7^n-1 est divisible par 6.

2- Soient a et b des entiers naturels non tous les deux nuls. Montrer qu'alors $15a+4b$ et $11a+3b$ ne sont pas tous les deux nuls et que leur $p\gcd$ vaut $p\gcd(a,b)$.

3- Quel est le reste de la division euclidienne de 19^{55} par 7?.

Solution :

1- On utilise le raisonnement par récurrence. Pour $n=0$, c'est vrai. Supposons 7^n-1 est divisible par 6, alors :

$$\begin{aligned} 7^{n+1}-1 &= 7^{n+1}-7+7-1 \\ &= 7\left(7^n-1\right)+6 \text{ somme de deux nombres divisibles par 6. } \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

2- On commence par montrer que $15a+4b$ et $11a+3b$ ne sont pas tous les deux nuls. Supposons, par l'absurde, que $15a+4b=0$ et $11a+3b=0$, ce qui entraine : $3(15a+4b)-4(11a+3b)=0$, i.e. : $a=0$ et $b=0$, ce qui est impossible car par hypothèse a et b sont des entiers naturels non tous les deux nuls. **(1pt)**

Montrons, maintenant, que : $p\gcd(a,b)=p\gcd(15a+4b,11a+3b)$. Posons :

$$D=p\gcd(a,b) \text{ et } D^{'}=p\gcd(15a+4b,11a+3b).$$

On a : D divise a et b, donc D divise $15a+4b$ et $11a+3b$, d'où : D divise $D^{'}$. **(0.5pt)**

D'autre part : $D^{'}$ divise $15a+4b$ et $11a+3b$, donc $D^{'}$ divise $3(15a+4b)-4(11a+3b)$, i.e. $D^{'}$ divise a. De même $D^{'}$ divise $11(15a+4b)-15(11a+3b)$, i.e. $D^{'}$ divise b. D'où : $D^{'}$ divise a et b par conséquent $D^{'}$ divise D. **(0.5pt)**

3- En utilisant les règles de congruences, on a :

$$19\equiv 5\,[7]\,, 19^2\equiv 4\,[7]\,, 19^3\equiv 6\,[7]\,, 19^4\equiv 2\,[7]\,, 19^5\equiv 3\,[7]\,, 19^6\equiv 1\,[7] \quad \textbf{(0.5pt)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 19^{6n} &\equiv 1\,[7]\,, 19^{6n+1}\equiv 5\,[7]\,, 19^{6n+2}\equiv 4\,[7]\,, 19^{6n+3}\equiv 6\,[7]\,, \\ 19^{6n+4} &\equiv 2\,[7]\,, 19^{6n+5}\equiv 3\,[7]\,, \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Comme : $55=6\times 9+1$ donc : $19^{55}\equiv 5\,[7]$ i.e. : le reste de la division euclidienne de 19^{55} par 7 est égal à 5 **(0.5pt)**.

N.B. : Note de l'interrogation 2 : (Exo1 ou Exo2)+Exo3+Exo4+Exo5. (Total 15 pts).

Note du Contrôle intermédiaire : (Exo1 ou Exo2)+Exo3+Partie2. (Total 20pts).